



TESIS - SM 142501

**MAGNETOHIDRODINAMIK FLUIDA NANO
TAK TUNAK YANG MENGALIR MELEWATI
BOLA BERMAGNET DIPENGARUHI OLEH
KONVEKSI CAMPURAN**

YOLANDA NORASIA
NRP 0611 1650 012 011

DOSEN PEMBIMBING:
Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc.
Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



THESIS - SM 142501

UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMIC NANO FLUID FLOW PASS A MAGNETIC SPHERE AFFECTED BY MIXED CONVECTION

YOLANDA NORASIA
NRP 0611 1650 012 011

SUPERVISORS:
Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc.
Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si.

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTATING, AND DATA SCIENCE
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2018

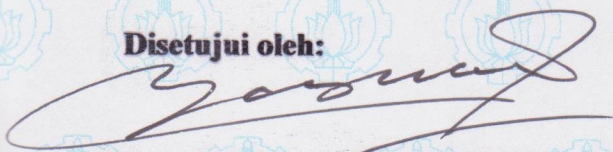
**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Oleh:

**YOLANDA NORASIA
NRP. 0611 1650 012 011**

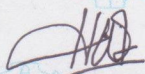
**Tanggal Ujian : 24 Juli 2018
Periode Wisuda : September 2018**

Disetujui oleh:



**Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002**

(Pembimbing I)



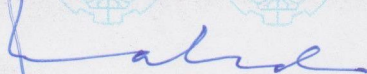
**Dr. Dieky Adzkiya, S. Si, M. Si.
NIP. 19830517 200812 1 003**

(Pembimbing II)



**Dr. Hariyanto, M. Si.
NIP. 19530414 198203 1 002**

(Penguji)



**Dr. Mahmud Yunus, M. Si.
NIP. 19620407 198703 1 005**

(Penguji)



**Dr. Dra. Mardijah, M. T.
NIP. 19670114 199102 2 001**

(Penguji)



Dekan FMKSD,

**Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002**

MAGNETOHIDRODINAMIK FLUIDA NANO TAK TUNAK YANG MENGALIR MELEWATI BOLA BERMAGNET DIPENGARUHI OLEH KONVEKSI CAMPURAN

Nama Mahasiswa : Yolanda Norasia
NRP : 0611 1650 012 011
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc.
2. Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si.

Abstrak

Fluida nano adalah tipe fluida Newtonian. Fluida nano merupakan larutan yang terdiri atas fluida cair sebagai fluida dasar dan partikel nano solid yang berukuran kecil satu sampai 100 nanometer (nm). Aliran magnetohidrodinamik adalah pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik akibat medan magnet. Medan magnet dan konveksi campuran dapat mempengaruhi profil kecepatan dan temperatur pada fluida. Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai pengaruh magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola bermagnet di dalam fluida nano dibawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet dengan model matematika dibangun oleh persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi. Pada penelitian ini dikaji pengaruh dari parameter magnetik, parameter konveksi campuran, bilangan Prandtl, dan volume fraction terhadap profil kecepatan dan temperatur. Penyelesaian diperoleh secara numerik menggunakan metode Euler Implicit Finite Difference. Hasil variansi dari parameter magnetik (M), parameter konveksi campuran (λ), bilangan Prandtl (Pr), dan volume fraction (χ) adalah sebagai berikut. Pertama, ketika parameter magnetik menjadi lebih besar mengakibatkan profil kecepatan dan profil temperatur menjadi lebih kecil. Kedua, ketika parameter konveksi campuran menjadi lebih besar mengakibatkan profil kecepatan dan temperatur juga menjadi lebih besar. Ketiga, ketika bilangan Prandtl menjadi lebih besar mengakibatkan profil kecepatan dan temperatur menjadi lebih kecil. Keempat, ketika volume fraction menjadi lebih besar mengakibatkan profil kecepatan menjadi lebih kecil dan profil temperatur menjadi lebih besar.

Kata-kunci: Fluida Newtonian, Fluida Nano, Aliran Magnetohidrodinamik, Euler Implicit Finite Difference

UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMIC NANO FLUID FLOW PASS A MAGNETIC SPHERE AFFECTED BY MIXED CONVECTION

Name : Yolanda Norasia
NRP : 0611 1650 012 011
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc.
2. Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si.

Abstract

Nano fluid is a type of Newtonian fluids. Nano fluid is a solvent that consists of liquid fluid as base fluid and solid nano particles with small scale from one to 100 nanometers (nm). Magnetohydrodynamics flow is a motion of fluid flow that can conduct due to the presence of magnetic field. Magnetic field and mixed convection can influence the velocity and temperature profile in fluid. In this research, we discuss the influence of unsteady magnetohydrodynamics on the boundary layer that flows through a magnetic sphere in nano fluid affected by mixed convection and magnetic field. We use a mathematical model constructed by the continuity equation, momentum equation and energy equation. This research examines the effect of magnetic parameter, mixed convection parameter, Prandtl number, and volume fraction to velocity and temperature profile. This solution is obtained numerically by using Euler Implicit Finite Difference. The result of the research by varying the magnetic parameter (M), mixed convective parameter (λ), Prandtl number (Pr), and volume fraction (χ) are as follows. First, velocity and temperature profiles become smaller when magnetic parameter increases. Second, velocity and temperature profiles become higher when mixed convective parameter increases. Third, velocity and temperature profiles become smaller when Prandtl number increases. Fourth, velocity profile become smaller and temperature profile become higher when volume fraction nano fluid increases.

Kata-kunci: Newtonian Fluid, Nano Fluid, Magnetohydrodynamics Flow, Euler Implicit Finite Difference

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Thesis yang berjudul Magnetohidrodinamik Fluida Nano Tak Tunak yang Mengalir Melewati Bola Bermagnet Dipengaruhi oleh Konveksi Campuran.

Sholawat serta salam senantiasa penulis curahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW, beserta para keluarga dan sahabatnya. Selesaiannya penyusunan Thesis ini tidak lepas dari bantuan, bimbingan serta dukungan dari berbagai pihak, maka sepatutnya penulis menyampaikan terimakasih kepada Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc. selaku pembimbing I dan Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si selaku pembimbing II atas keikhlasannya memberikan motivasi, bimbingan, arahan kepada penulis selama menyusun proposal, melaksanakan penelitian sampai penulisan tesis. Terimakasih kepada kedua orangtua tercinta Bapak Ir. Muhammad Nuruddin dan Ibu Dra. Suswiyati, serta adik tersayang ananda Winona Norasia yang selalu mendukung penulis dengan penuh kesabaran selama menempuh Program Magister Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Ucapan terimakasih dan penghargaan setinggi-tingginya penulis haturkan juga kepada:

1. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.Es., Ph.D., selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.
2. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc, selaku Dekan MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya dan dosen pembimbing atas segala bantuan serta telah meluangkan waktu dan tenaga untuk memberikan bimbingan, petunjuk, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan baik.
3. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S. Si., M. T., selaku Kepala Departemen Matematika ITS.
4. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M. Si., selaku Ketua Program Studi Pasca Sarjana Matematika dan sebagai dosen penguji yang telah memberi bimbingan, motivasi serta arahan dalam mengerjakan Tesis.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku Dosen Wali yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran selama menempuh pendidikan pasca sarjana
6. Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si., selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis.

7. Bapak Dr. Hariyanto, M. Si. dan Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M. T. selaku dosen penguji atas kritik dan saran sehingga penulis dapat memperbaiki tesis ini.
8. Bapak/Ibu dosen pembina matakuliah pada Program Studi S2 Matematika Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember yang telah memberikan ilmu, kemudahan, dan motivasi kepada penulis selama perkuliahan.
9. Seluruh staf akademik dan administrasi di lingkungan Pascasarjana ITS, FMIPA ITS dan Jurusan Matematika yang telah menyediakan fasilitas dan layanan selama penulis mengikuti program magister di Institut Teknologi Sepuluh Nopember
10. Tim Penelitian Magnetohidrodinamik (Mufatin Fauziyah, S. Pd., Lutfi Mardianto, S. Pd., Maulidyani Abu, S. Si., dan Charisma Juni K, S. Si.) atas segala dukungan, kerjasama, dan motivasi selama proses penelitian hingga terselesaikannya tesis ini.
11. Indira Anggriani, S. Si., M. Si., Rizky V. Pratomo, S. Pd., dan Devi Aryani, S. Si. yang memberikan saran dan menjadi rekan diskusi terkait Tesis yang dikerjakan penulis.
12. Teman-teman mahasiswa Program Magister Matematika angkatan 2016 dengan segala kelebihan dan kekurangan yang dimiliki untuk berjuang bersama. Semoga tali silaturahmi kita tidak putus walaupun kita kembali ke daerah masing-masing.
13. Sahabat saya Lisda Septi Hasofah, Dian Kusuma Rahma Putri, dan Anisykur Rofiqoh yang selalu bersama dalam senang maupun susah dan saling mendukung satu sama lain.
14. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian tesis ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Thesis ini masih mempunyai banyak kekurangan, untuk itu pula dalam kesempatan ini penulis meminta maaf sebesar-besarnya atas segala kekurangan yang ada. Kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun juga sangat diharapkan sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN TESIS	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR NOTASI	xxi
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Penelitian	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian-Penelitian Terdahulu	5
2.2 Fluida	8
2.2.1 Fluida Nano	9
2.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu	10
2.4 Aliran Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>)	11
2.5 Konveksi Campuran	11
2.6 Bilangan Non-Dimensional Pada Aliran Perpindahan Panas	11
2.6.1 Bilangan Non-Dimensi Reynolds (Re)	12
2.6.2 Bilangan Non-Dimensi Grashof (Gr)	12
2.6.3 Bilangan Non-Dimensi Prandtl (Pr)	13
2.7 Magnetohidrodinamik (MHD)	13
2.8 Pemodelan Matematika	15
2.9 Metode <i>Euler Implicit</i>	15
BAB 3 METODE PENELITIAN	19
3.1 Tahapan Penelitian	19
3.2 Tempat Penelitian	20

BAB 4	MODEL MATEMATIKA	21
4.1	Persamaan Pembangun	22
4.1.1	Persamaan Kontinuitas	22
4.1.2	Persamaan Momentum	25
4.1.3	Persamaan Energi	31
4.2	Persamaan Pembangun Dimensional	36
4.3	Persamaan Pembangun Non-Dimensional	38
4.3.1	Persamaan Kontinuitas	38
4.3.2	Persamaan Momentum	39
4.3.3	Persamaan Energi	40
4.4	Teori Lapisan Batas	40
4.5	Fungsi Alir (<i>Stream Function</i>)	44
4.6	Persamaan Similaritas	46
4.6.1	Persamaan Momentum untuk <i>Small Time</i>	47
4.6.2	Persamaan Energi untuk <i>Small Time</i>	48
4.6.3	Persamaan Momentum untuk <i>Large Time</i>	48
4.6.4	Persamaan Energi untuk <i>Large Time</i>	49
BAB 5	PENYELESAIAN SECARA NUMERIK MODEL MATEMATIKA	53
5.1	Diskritisasi Model	53
5.1.1	Diskritisasi Model Persamaan Momentum untuk <i>small time</i>	54
5.1.2	Diskritisasi Model Persamaan Energi untuk <i>small time</i>	56
5.1.3	Diskritisasi Model Persamaan Momentum untuk <i>large time</i>	57
5.1.4	Diskritisasi Model Persamaan Energi untuk <i>large time</i>	59
5.2	Algoritma Thomas	60
5.3	Validasi Data Penelitian dengan Data Penelitian Sebelumnya	62
5.4	Simulasi dan Analisis Hasil	63
5.4.1	Pengaruh Variasi Parameter Magnetik (M) pada Partikel Nano Cu	64
5.4.2	Pengaruh Variasi Parameter Magnetik (M) pada Partikel Nano Al_2O_3	66
5.4.3	Pengaruh Variasi Parameter Konveksi Campuran (λ) pada Partikel Nano Cu	67
5.4.4	Pengaruh Variasi Parameter Konveksi Campuran (λ) pada Partikel Nano Al_2O_3	69
5.4.5	Pengaruh Variasi Prandtl (Pr) pada Partikel Nano Cu	70
5.4.6	Pengaruh Variasi Prandtl (Pr) pada Partikel Nano Al_2O_3	72
5.4.7	Pengaruh Variasi <i>volume fraction</i> (χ) pada Partikel Nano Cu	74
5.4.8	Pengaruh Variasi <i>volume fraction</i> (χ) pada Partikel Nano Al_2O_3	75

BAB 6	KESIMPULAN DAN SARAN	77
6.1	Kesimpulan	77
6.2	Saran	78
	PERNYATAAN RESMI	79
	DAFTAR PUSTAKA	81
	LAMPIRAN	85
	BIODATA PENULIS	125

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Metode <i>Euler Implicit</i>	15
Gambar 4.1	Koordinat Bola Pejal	21
Gambar 4.2	Bentuk Fisis Objek Penelitian.....	22
Gambar 4.3	Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur	23
Gambar 4.4	Komponen Tegangan pada Permukaan Elemen Fluida ..	27
Gambar 4.5	Komponen <i>Heat Flux</i> pada Volume Kontrol.....	33
Gambar 5.1	Kurva Kecepatan Aliran Fluida	62
Gambar 5.2	Kurva Temperatur Aliran Fluida	63
Gambar 5.3	Kurva Kecepatan Variasi Magnetik	65
Gambar 5.4	Kurva Temperatur Variansi Magnetik	65
Gambar 5.5	Kurva Kecepatan Variasi Magnetik	66
Gambar 5.6	Kurva Temperatur Variansi Magnetik	67
Gambar 5.7	Kurva Kecepatan Variasi Konveksi Campuran.....	68
Gambar 5.8	Kurva Temperatur Variasi Konveksi Campuran.....	68
Gambar 5.9	Kurva Kecepatan Variasi Konveksi Campuran.....	69
Gambar 5.10	Kurva Temperatur Variasi Konveksi Campuran.....	70
Gambar 5.11	Kurva Kecepatan Variasi Bilangan Prandtl	71
Gambar 5.12	Kurva Temperatur Variasi Bilangan Prandtl	72
Gambar 5.13	Kurva Kecepatan Variasi Bilangan Prandtl	73
Gambar 5.14	Kurva Temperatur Variasi Bilangan Prandtl	73
Gambar 5.15	Kurva Kecepatan Variasi <i>Volume Fraction</i>	74
Gambar 5.16	Kurva Temperatur Variasi <i>Volume Fraction</i>	75
Gambar 5.17	Kurva Kecepatan Variasi <i>Volume Fraction</i>	76
Gambar 5.18	Kurva Temperatur Variasi <i>Volume Fraction</i>	76

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Peneliti Sebelumnya	6
Tabel 2.2	<i>Thermo-physical properties</i>	10
Tabel 5.1	Validasi Hasil Simulasi	63
Tabel 5.2	<i>Thermo-physical properties nano particle</i>	64
Tabel 5.3	<i>Parameter Magnetik</i>	64
Tabel 5.4	<i>Rentang Bilangan Prandtl</i>	70

DAFTAR NOTASI

U_{∞}	Kecepatan bebas fluida
τ	Tegangan geser pada fluida
μ	Viskositas fluida
Re	Bilangan Reynolds
a	Panjang Karakteristik
F	Gaya yang bekerja pada sistem
e	Energi total persatuan massa setiap partikel sistem
\tilde{u}	Energi per satuan massa
$\frac{v^2}{2}$	Energi kinetik per satuan massa
gz	Energi potensial per satuan massa
Gr	Bilangan Grashof
g	Gaya gravitasi
β	Koefisien muai panas
T_w	Temperatur fluida pada lapisan batas
T_{∞}	Temperatur fluida di luar lapisan batas
Pr	Bilangan Prandtl
B	Total Medan magnet yang terjadi pada sistem
b	Induksi medan magnet
p	tekanan
E	Medan listrik
V	Kecepatan massal plasma
J	Kerapatan arus
t	waktu
\hat{n}	Vektor normal terhadap elemen dA
β	Koefisien muai panas
σ	Konduktivitas listrik
ν	Viskositas kinematik
ψ	Fungsi alir
M	Parameter magnetik
λ	Parameter konveksi campuran
χ	<i>volume fraction</i>
χ	<i>nanopartikel volume fraction</i>
ρ	densitas fluida kg/m^3
T	Temperatur
μ	Viskositas dinamik fluida
h	Entalpi spesifik
C_p	Kalor spesifik fluida
H	Reaksi Panas
W	Usaha
p_h	tekanan hidrostatik
k	konduktivitas fluida

M_{sys}	Massa Sistem
p	Tekanan plasma
$\frac{du}{dy}$	Gradien kecepatan fluida

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan mengenai latar belakang yang mendasari usulan penelitian ini dan berdasarkan latar belakang masalah maka dapat disusun rumusan masalah yang mendasari tujuan penelitian serta manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Fluida adalah zat yang dapat berubah bentuk secara kontinu apabila terkena tegangan geser (Widodo, 2012). Untuk analisis pengukuran dari pergeseran suatu fluida digunakan viskositas. Fluida secara umum terdiri dari dua jenis, yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian. Fluida Newtonian adalah fluida yang tidak mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Contoh dari fluida Newtonian adalah fluida nano. Fluida nano merupakan larutan yang mengandung partikel nano dengan ukuran satu sampai 100 nanometer (nm) dalam fluida dasar (Ramadhan, 2012). Fluida nano terdiri dari fluida dasar sebagai medium pendispersi dan partikel nano sebagai zat terdispersi. Fluida dasar yang digunakan berupa air, oli, minyak dan sebagainya. Partikel nano dapat berupa logam dan oksida logam. Partikel nano logam adalah partikel yang memiliki sifat mengkilap dan umumnya merupakan penghantar listrik yang baik. Sedangkan partikel nano oksida logam adalah partikel yang terbentuk karena adanya reaksi langsung antara logam dengan oksigen. Partikel nano berupa logam seperti *Cu* (Tembaga), *Au* (Emas), dan *Ag* (Perak). Sedangkan partikel nano berupa oksida logam seperti Al_2O_3 (Alumina), *SiC* (Silikon Karbida) dan TiO_2 (Titania). Pada penelitian ini digunakan partikel nano *Cu* dan Al_2O_3 . Partikel nano *Cu* memiliki konduktivitas termal yang lebih besar dibandingkan dengan Al_2O_3 (Rebay *dkk*, 2016). Partikel nano *Cu* dan Al_2O_3 jika dicampurkan dengan fluida dasar air dan dengan adanya pengaruh medan magnet, maka menjadi fluida yang dapat menghantarkan arus listrik sehingga dapat disebut dengan fluida yang memiliki karakteristik magnetohidrodinamik. Oleh karena konduktivitas termal partikel nano *Cu* lebih besar dibandingkan Al_2O_3 , maka partikel nano *Cu* menghantarkan arus listrik yang lebih besar dibandingkan Al_2O_3 . Pada permasalahan yang nyata, berbagai macam fluida yang terjadi pada berbagai macam keadaan tidak selalu dapat dinyatakan sebagai fluida Newtonian (Widodo, 2012a; Widodo, 2013). Terdapat beberapa fluida yang memenuhi sifat fluida Non-Newtonian, yaitu fluida yang mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Contoh dari fluida Non-Newtonian adalah fluida mikrokutub.

Aliran magnetohidrodinamik adalah pergerakan fluida yang dapat menghantarkan listrik diakibatkan oleh medan magnet. Penerapan aliran

magnetohidrodinamik banyak diterapkan dalam perkembangan teknologi dan industri, contohnya pada pengeboran minyak, pemipaan zat-zat kimia pada pabrik dan penggerak pada kapal. Konsep dasar pada aliran magnetohidrodinamik adalah medan magnet dapat menginduksi arus listrik pada fluida konduktif yang bergerak dan dapat menciptakan gaya pada fluida serta mengubah medan magnet itu sendiri (Widodo *dkk*, 2015). Selain medan magnet, profil kecepatan dan temperatur pada fluida juga dapat dipengaruhi oleh konveksi campuran. Konveksi campuran adalah pengabungan antara aliran konveksi bebas dan konveksi paksa. Terdapat beberapa penelitian mengenai pengaruh konveksi campuran pada aliran fluida seperti pada penelitian (Mohammad *dkk*, 2012) yang mengamati separasi aliran pada fluida mikropolar mengalir melewati sebuah bola dibawah pengaruh konveksi campuran tanpa adanya medan magnet. Selanjutnya, pada penelitian (Ghani *dkk*, 2014) tentang model aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik yang melewati sebuah bola dan dikaji pengaruh parameter viskoelastik, parameter konveksi campuran dan juga bilangan Prandtl yang mempengaruhi karakteristik aliran fluida.

Fluida yang digunakan dalam penelitian ini adalah fluida nano. Penambahan partikel nano bertujuan untuk meningkatkan temperatur, memperbesar luas permukaan perpindahan panas, dan koefisien perpindahan panas. Penelitian sebelumnya mengenai permasalahan magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati bola didalam fluida nano dibawah pengaruh medan magnet dengan penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga skema Keller-Box dilakukan oleh (Palyama, 2017). Pada penelitian tersebut diamati pengaruh parameter bilangan Prandtl, parameter magnetik, dan *volume fraction* terhadap profil kecepatan dan temperatur.

Dalam penelitian ini dikaji dan diteliti mengenai magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak dipengaruhi oleh konveksi campuran yang mengalir melewati bola bermagnet secara teori dengan membuat model matematikanya. Model matematika yang dibangun menggunakan hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika sehingga diperoleh persamaan pembangun kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Selanjutnya disimulasikan secara numerik menggunakan metode *Euler Implicit Finite Difference* untuk mengkaji pengaruhnya terhadap profil kecepatan aliran fluida dan temperatur dengan perangkat lunak MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, rumusan masalah untuk penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana membangun model matematika pada magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran dan medan magnet?

2. Bagaimana menyelesaikan model matematika secara numerik pada magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran dan medan magnet dengan metode *Euler Implicit Finite Difference*?
3. Bagaimana pengaruh parameter magnetik, parameter konveksi campuran, bilangan Prandtl, dan *volume fraction* terhadap profil kecepatan dan temperatur?

1.3 Batasan Penelitian

Di dalam rencana penelitian ini, diberikan beberapa batasan masalah dengan rincian sebagai berikut.

1. Geometri benda yang diamati dalam penelitian ini adalah bola pejal bermagnet.
2. Jenis Fluida yang diamati adalah fluida nano dalam bentuk cair.
3. Partikel nano yang diamati pada penelitian ini adalah Cu (tembaga) dan Al_2O_3 (alumina) dengan fluida dasar adalah air.
4. Aliran fluida mengalir dari bawah ke atas.
5. Penelitian ini difokuskan pada aliran lapisan batas yang terletak di titik stagnasi bawah pada posisi $x = 0^\circ$.
6. Aliran dalam kondisi tak tunak (*unsteady*), dan aliran fluidanya *incompressible* karena tidak dibawah pengaruh tekanan.
7. Untuk mendapatkan penyelesaian numerik dari persamaan pembangun digunakan metode *Euler Implicit Finite Difference*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam perencanaan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Membangun model matematika magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran dan medan magnet.
2. Merancang solusi numerik untuk model magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran dan medan magnet.
3. Menganalisis pengaruh parameter magnetik, parameter konveksi campuran, bilangan Prandtl, dan *volume fraction* terhadap profil kecepatan dan temperatur.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah

1. Dapat membantu dalam pengembangan ilmu matematika terapan dan sebagai referensi bagi penelitian selanjutnya.
2. Sebagai salah satu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika dibidang teknologi dan industri.
3. Sebagai salah satu bentuk kontribusi mengenai penerapan metode *Euler Implicit Finite Difference* diterapkan pada model matematika aliran tak tunak fluida nano yang melewati bola bermagnet.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini dibahas mengenai kajian pustaka dan dasar teori yang berkaitan dengan topik penelitian tesis.

2.1 Penelitian-Penelitian Terdahulu

Penelitian-penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya adalah sebagai berikut.

1. ***Numerical Solution for Convection Boundary Layer Flow Over A Solid Sphere of Newtonian and Non-Newtonian Fluid*** (Alkasasbech, 2015). Penelitian ini membahas beberapa hal diantaranya aliran fluida nano konveksi campuran pada lapisan batas yang melewati bola dalam keadaan *steady*. Pada penelitian tersebut diperoleh korelasi antara *nano partikel volume fraction* dengan profil kecepatan dan temperatur. Semakin besar *nano partikel volume fraction*, maka profil temperatur semakin meningkat akan tetapi kecepatan semakin menurun.
2. ***Viscoelastic Fluid Flow Pass A Porous Circular Cylinder When The Magnetic Field Include*** (Widodo dkk, 2016b). Penelitian ini menjelaskan tentang pengaruh parameter viskoelastik, parameter konveksi campuran, parameter magnetik, parameter permeabilitas, dan bilangan Prandtl terhadap profil kecepatan dan temperatur. Semakin besar nilai parameter viskoelastik, parameter permeabilitas, dan bilangan Prandtl maka kecepatan fluida akan menurun. Semakin besar nilai parameter konveksi campuran dan magnetik maka semakin besar kecepatan fluida. Semakin besar nilai parameter viskoelastik, parameter konveksi campuran, dan parameter magnetik maka temperatur akan meningkat. Sedangkan temperatur akan menurun apabila semakin besar nilai bilangan Prandtl.
3. ***MHD Effect on Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow Pass A Circular Cylinder with Constant Wall Temperature*** (Ismail dkk, 2017). Penelitian ini menjelaskan tentang pengaruh parameter magnetik pada separasi waktu, *skin friction*, dan laju perpindahan panas. Dengan adanya parameter magnetik, maka *skin friction* dan perpindahan panas akan semakin meningkat. Semakin besar nilai parameter magnetik maka separasi waktu akan bertambah.
4. ***Magnetohidrodinamik yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Nano Dibawah Pengaruh Medan Magnet*** (Palyama, 2017). Penelitian ini mengenai

aliran magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet. Penyelesaian numerik model matematika tersebut menggunakan metode beda hingga skema Keller- *Box*. Penelitian ini menjelaskan pengaruh parameter magnetik, bilangan prandtl, *volume fraction* terhadap kurva kecepatan dan temperatur yaitu semakin meningkatnya parameter magnetik maka kecepatan fluida yang dihasilkan semakin meningkat, sedangkan temperaturnya semakin menurun. Semakin meningkatnya bilangan Prandtl kecepatan fluida berpengaruh, untuk kurva temperatur fluida mengalami penurunan. Semakin besar nilai *volume fraction* akan meningkatkan profil temperatur fluida nano.

5. **Magnetohidrodinamik Fluida Nano Tak Tunak yang Mengalir Melewati Bola Bermagnet Dipengaruhi oleh Konveksi Campuran** (Norasia, 2018). Penelitian ini membahas mengenai magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak dipengaruhi oleh konveksi campuran yang mengalir melewati bola bermagnet. Penelitian ini menjelaskan pengaruh parameter magnetik, konveksi campuran, bilangan prandtl, dan *volume fraction* terhadap kurva kecepatan dan temperatur dan disimulasikan secara numerik menggunakan metode *Euler Implicit Finite Difference*.

Berikut ini adalah tabel penelitian-penelitian sebelumnya sebagai mana diberikan oleh Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Peneliti Sebelumnya

No	Penulis	Judul	Benda	Fluida	Magnet Pada Benda	Metode	Keterangan
1.	Alkawasbech (2015)	Numerical Solution for Convection Boundary Layer Flow Over A Solid Sphere of Newtonian and Non-Newtonian Fluid	Bola Pejal	Fluida Nano	Ada	Keller-Box	Mengkaji pengaruh <i>nano particle volume fraction</i> terhadap kecepatan dan temperatur dalam keadaan <i>steady</i> dibawah pengaruh medan magnet dan konveksi campuran

No	Penulis	Judul	Benda	Fluida	Magnet pada Benda	Metode	Keterangan
2.	Widodo, <i>dkk</i> (2016)	Visco- elastic Fluid Flow Pass A Porous Circular Cylinder When The Magnetic- Field Include	Silinder	Fluida Visko- elastik	Ada	Beda Hingga	Mengkaji pengaruh parameter viskoelastik, konveksi campuran, permeabilitas, dan bilangan Prandtl parameter terhadap kecepatan dan temperatur dalam keadaan <i>steady</i> dibawah pengaruh medan magnet dan konveksi campuran.
3.	Ismail <i>dkk</i> (2017)	MHD Effect on Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow Pass A Circular Cylinder with Constant Wall Tempre- rature	Silinder	Fluida Visko	Ada	Keller- Box	Mengkaji pengaruh parameter magnetik pada separasi waktu, <i>skin friction</i> , dan laju perpini- dahan panas dalam dalam keadaan <i>unsteady</i> dibawah pengaruh medan magnet dan konveksi campuran.
4.	Palyama (2017)	Magneto- hidro- dinamik yang	Bola	Fluida Nano	Ada	Keller- Box	Mengkaji pengaruh parameter magnetik,

No	Penulis	Judul	Benda	Fluida	Magnet pada Benda	Metode	Keterangan
		Tak Tunak Pada Lapisan Batas yang Mengalir Melalui Bola di dalam Fluida Nano Dibawah Pengaruh Medan Magnet					bilangan prandtl, <i>volume fraction</i> terhadap kecepatan dan temperatur.
5.	Yolanda Norasia (2018)	Fluida Nano tak Tunak yang Mengalir Melewati Bola Bermagnet dipengaruhi oleh Konveksi Campuran	Bola Bermagnet	Fluida Nano	Ada	<i>Euler Implicit</i>	Mengkaji pengaruh konveksi campuran dan medan magnet terhadap profil kecepatan dan profil temperatur.

2.2 Fluida

Pada umumnya materi terdapat tiga fase zat yang tersebar di alam, yaitu padat, cair dan gas. Fase padat memiliki karakteristik mempertahankan bentuk dan ukuran yang tetap. Berbeda dengan fase cair dan gas yang tidak dapat mempertahankan bentuk dan ukuran. Oleh karena itu, fase cair dan gas mempunyai kemampuan mengalir. Zat yang mempunyai kemampuan mengalir disebut dengan fluida. Fluida didefinisikan sebagai zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun tegangan geser tersebut (Widodo, 2012). Fluida dibagi menjadi dua bagian yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian yang mempunyai sifat sangat berbeda. Fluida Newtonian adalah fluida yang tidak mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Contoh dari fluida Newtonian

adalah fluida nano. Sementara fluida non-Newtonian adalah fluida yang mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Contoh dari fluida non-Newtonian adalah fluida mikrokutub.

2.2.1 Fluida Nano

Fluida nano merupakan larutan yang terdiri atas fluida cair sebagai fluida dasar dan partikel nano *solid* yang berukuran kecil satu sampai 100 nanometer (nm) (Ramadhan, 2012). Fluida nano pertama kali diperkenalkan oleh Choi dan Eastman pada tahun 1995. Dengan adanya penambahan partikel nano mengakibatkan temperatur mengalami kenaikan.

Secara *physical case* perlu diperhatikan densitas dari partikel nano untuk mendapatkan perbandingan campuran yang tepat. Volume partikel ditentukan dengan menggunakan densitas sebenarnya dari partikel nano dan massanya dengan mengabaikan massa udara yang terperangkap didalamnya.

Sifat Sifat Fluida Nano (Alkasasbech, 2015) :

1. Densitas Fluida Nano

Densitas adalah kerapatan atau massa jenis suatu fluida dan dapat diidentifikasi sebagai massa suatu zat per satuan volume:

$$\rho_{fn} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s \quad (2.1)$$

dengan

ρ_{fn} : densitas fluida nano kg/m^3

χ : *nanopartikel volume fraction*

ρ_f : densitas fluida dasar kg/m^3

ρ_s : densitas partikel nano kg/m^3

2. Viskositas

Pada penelitian ini, viskositas yang dipakai adalah viskositas dinamik yang didapatkan dari perhitungan prediksi menggunakan persamaan dari *Brinkman equation* yaitu:

$$\mu_{fn} = \frac{\mu_f}{(1 - \chi)^{2.5}} \quad (2.2)$$

dengan

μ_{fn} : viskositas dinamik fluida nano

μ_f : viskositas dinamik fluida dasar

χ : *nanopartikel volume fraction*

3. Kalor spesifik Fluida Nano

Definisi kalor spesifik fluida nano yaitu jumlah energy yang dibutuhkan untuk menaikkan satu satuan massa zat pada suhu satu derajat celcius, kalor spesifik fluida nano pada tekanan konstan $(\rho C_p)_{fn}$ dapat

diestimasi berdasarkan korelasi antara fluida nano dengan fluida dasar sebagai berikut:

$$(\rho C_p)_{fn} = (1 - \chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s \quad (2.3)$$

dengan

$C_{p_{fn}}$: kalor spesifik fluida nano

C_{p_f} : kalor spesifik fluida dasar

C_{p_s} : kalor spesifik partikel $kJ/kg.K$

4. Konduktifitas termal

Konduktifitas termal adalah suatu besaran intensif bahan yang menunjukkan kemampuannya untuk mengantarkan panas. Didalam fluida nano dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{k_{fn}}{k_f} = \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)} \quad (2.4)$$

Berikut adalah sifat *thermo-physical* dari air, partikel Cu , dan Al_2O_3

Tabel 2.2: *Thermo-physical properties*

<i>Properties</i>	Air	Partikel Cu	Partikel Al_2O_3
$\rho(\frac{kg}{m^3})$	997.1	8933	3970
$c_p(\frac{kJ}{kg.K})$	4179	385	765
$k(\frac{W}{mK})$	0.613	400	40

2.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu (Widodo, 2012a) :

1. Aliran Tunak (*Steady State*)

Suatu aliran yang kecepatannya tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady State*)

Suatu aliran yang kecepatannya dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

2.4 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Lapisan batas merupakan bagian dari permasalahan mekanika fluida yang merupakan lapisan yang terbentuk karena adanya gesekan antara fluida yang mengalir dengan permukaan benda yang disebabkan adanya viskositas dari fluida yang melewati benda tersebut. Untuk menyelesaikan lapisan batas perlu diketahui terlebih dahulu jenis aliran pada fluida. Jenis aliran pada fluida dibagi menjadi tiga yaitu aliran laminar, aliran turbulen, dan aliran transisi (Widodo *dkk*, 2015).

1. Aliran Laminer

Aliran laminar adalah aliran yang partikel-partikelnya bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida kurang dari 500 ($Re < 500$) atau pada saat fluida bergerak perlahan dengan kecepatan yang kecil dan atau fluida memiliki tingkat kekentalan atau viskositas yang besar.

2. Aliran Turbulen

Aliran turbulen adalah aliran yang partikel-partikelnya bergerak secara acak dan tidak beraturan. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida lebih dari 12.500 ($Re > 12.500$)

3. Aliran Transisi

Aliran transisi adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen karena terjadi perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida berkisar antara 500 sampai 12.500 ($500 < Re < 12.500$).

2.5 Konveksi Campuran

Perpindahan panas dibagi menjadi tiga yaitu konduksi, konveksi, dan radiasi. Perpindahan panas yang biasanya terjadi diantara fluida adalah konveksi. Konveksi adalah adanya pergerakan fluida yang mengakibatkan terjadinya perpindahan panas dari suatu tempat ke tempat lainnya. Secara umum konveksi terdiri dari tiga jenis, yaitu konveksi bebas atau biasa disebut juga sebagai konveksi alamiah, konveksi paksa (*forced convection*), dan konveksi campuran (*mixed convection*). Konveksi bebas disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) karena adanya perbedaan temperatur pada fluida. Sedangkan konveksi paksa disebabkan oleh kekuatan yang berasal dari luar atau *external force*. Fluida bergerak karena adanya alat yang menggerakkan fluida tersebut, misalkan kipas pompa, blower, *heater*, dan sebagainya. Aliran konveksi campuran yang merupakan gabungan antara aliran konveksi bebas dan konveksi paksa (Ghani *dkk*, 2014).

2.6 Bilangan Non-Dimensional Pada Aliran Perpindahan Panas

Konveksi panas terjadi pada saat partikel-partikel fluida mengalami pergerakan akibat adanya perbedaan temperatur. Berdasarkan persamaan tersebut, Menurut (Favre, 2009) pada konveksi panas terdapat beberapa

bilangan non-dimensi yang terkait dengan kecepatan aliran, viskositas, dan temperatur diberikan sebagai berikut.

2.6.1 Bilangan Non-Dimensi Reynolds (Re)

Bilangan non-dimensi Reynolds adalah perbandingan gaya inersia terhadap gaya viskositas. Bilangan non-dimensi Reynolds adalah ukuran relatif jenis aliran fluida, seperti aliran laminar, aliran transisi, atau aliran turbulen didalam pipa, lapisan batas, atau disekitar benda yang terendam. Bilangan non-dimensi Reynolds dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{\text{GayaInersia}}{\text{GayaViskositas}} = \frac{\rho_f a^3 U_\infty \frac{U_\infty}{a}}{\mu_f a U_\infty} \\
 Re &= \frac{U_\infty \rho_f a}{\mu_f} \\
 Re &= \frac{U_\infty a}{v_f}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan:

U_∞ : kecepatan pada aliran bebas (m/s)

ρ_f : densitas fluida

μ_f : viskositas dinamik fluida

a : panjang karakteristik suatu benda yang dilewati fluida

v_f : viskositas kinematik

Nilai kecepatan aliran U_∞ berbanding lurus dengan bilangan Reynolds (Re). Dalam hal ini, semakin besar kecepatan aliran suatu fluida U_∞ maka semakin besar bilangan non-dimensi Reynolds (Re). Kondisi seperti ini ditunjukkan dengan tipe aliran fluida yang berawal dari aliran laminar menjadi aliran turbulen (Potter *dkk*, 2012).

2.6.2 Bilangan Non-Dimensi Grashof (Gr)

Bilangan non-dimensi Grashof adalah perbandingan gaya apung *buoyancy force* terhadap gaya viskos dalam aliran fluida konveksi bebas yang mempunyai peranan yang sama seperti halnya bilangan Reynolds (Re) pada aliran konveksi paksa. Bilangan non-dimensi Grashof dapat dituliskan sebagai berikut.

$$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{v_f^2} \tag{2.6}$$

dengan:

g : gaya gravitasi

β : koefisien muai panas

a : panjang karakteristik suatu benda yang dilewati fluida

v_f : viskositas kinematik

T_w : temperatur permukaan fluida

T_∞ : temperatur fluida

2.6.3 Bilangan Non-Dimensi Prandtl (Pr)

Bilangan Prandtl adalah perbandingan antara viskositas kinematika terhadap difusivitas termal fluida. Viskositas kinematika (ν_f) atau (μ_f/ρ_f) disebut sebagai difusivitas molekular momentum karena merupakan ukuran kecepatan perpindahan momentum antara molekul-molekul. Difusivitas termal fluida (α_f) atau $(\frac{k}{\rho c_p})$ disebut sebagai difusivitas molekular panas karena berkaitan dengan ukuran perbandingan antara penerusan panas dan kapasitas penyimpanan energi molekul-molekul. Bilangan Prandtl dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$Pr = \frac{\text{viskositas kinematika}}{\text{difusivitas termal}} = \frac{\frac{\mu_f}{\rho_f}}{\frac{k}{\rho_f c_p}}$$
$$Pr = \frac{\mu_f}{\alpha_f \rho_f} \quad (2.7)$$

dengan:

k : konduktivitas panas fluida

c_p : panas jenis pada tekanan konstan

2.7 Magnetohidrodinamik (MHD)

Istilah *magnetohydrodynamic* terdiri dari kata *magneto* yang berarti *medan magnetik*, *hydro* yang berarti *cairan* atau *fluida* dan *dynamic* yang berarti *pergerakan*. *Magnetohydrodynamic* (MHD) dapat diartikan sebagai suatu hantaran dan pergerakan suatu fluida secara elektrik di dalam suatu medan magnetik. Fluida yang dimaksud dapat berupa plasma, logam cair, atau air garam.

Bentuk persamaan MHD yaitu persamaan-persamaan fluida yang meliputi persamaan kontinuitas, persamaan energi, dan untuk persamaan pada medan magnetnya menggunakan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan-persamaan dasar untuk membuat persamaan MHD yang ideal :

1. Persamaan momentum :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

2. Persamaan konservasi massa :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

3. Persamaan konservasi energi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

4. Persamaan Maxwell :

i Hukum Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} p$$

ii Hukum Gauss untuk Magnetik

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

iii Hukum Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

iv Hukum Ampere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

dengan:

B : Medan Magnet $(0, 0, B)$

E : Medan Listrik $(0, 0, E)$

V : Kecepatan massa plasma

J : Kerapatan arus

ρ : Massa jenis

p : Tekanan Plasma

t : Waktu

μ_0 : Permeabilitas ruang hampa $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$

Pada persamaan MHD di atas, persamaan $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} p$ pada persamaan Maxwell tidak digunakan. Persamaan $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ hanya digunakan saat kondisi awal saja. Selain itu, untuk kecepatan rendah, perpindahan arusnya bisa diabaikan atau dianggap nol (Arber, 2013). Sehingga persamaan umum dari MHD menjadi :

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

dan untuk mencari besar medan listrik, digunakan formulasi berikut:

$$E + V \times B = \eta J$$

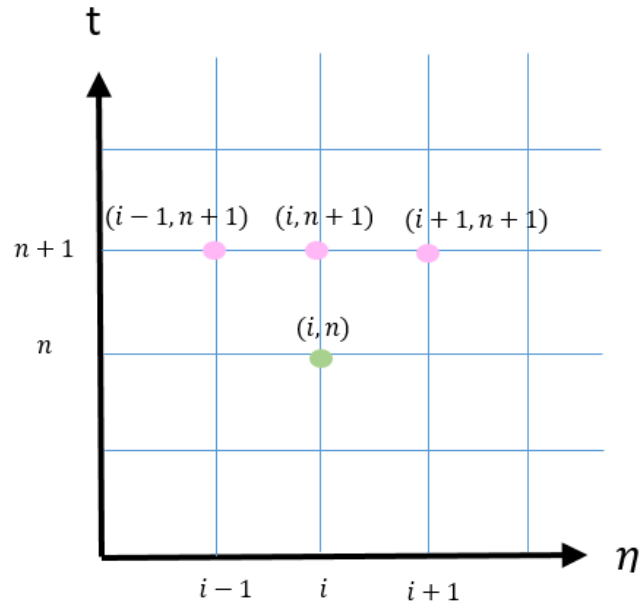
jika $\eta = 0$ maka persamaan MHD tersebut dikatakan sebagai persamaan MHD ideal.

2.8 Pemodelan Matematika

Untuk membangun model matematika aliran magnetohidrodinamik tak tunak fluida nano yang melewati bola bermagnet didasarkan pada penurunan hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I termodinamika yang penyederhanaan persamaan pembangunnya dengan menggunakan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun yang berdimensi dari aliran magnetohidrodinamik tak tunak fluida nano yang melewati bola bermagnet.

2.9 Metode *Euler Implicit*

Metode numerik adalah salah satu teknik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan matematis dengan operasi perhitungan. Metode numerik secara umum dibagi menjadi dua, yaitu metode *explicit* dan metode *implicit*. Kelebihan dari metode implisit adalah memiliki kestabilan tanpa syarat (Nayak *dkk*, 2016). Metode *Euler Implicit* adalah salah satu metode numerik *Implicit* yang dapat menyelesaikan persamaan differensial. Pendekatan model persamaan differensial dengan menggunakan Metode *Euler Implicit* akan menghasilkan matriks tri-diagonal dan diselesaikan dengan menggunakan Algoritma Thomas. Metode *Euler Implicit* menggunakan beda mundur dan beda tengah pada Deret Taylor dengan akurasi pada order pertama.



Gambar 2.1: Metode *Euler Implicit*

Misalkan terdapat persamaan differensial berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right)_i^{n'}$$

untuk $n' = n + 1$, Skema *Euler Implicit* adalah:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = v \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta^2 y}$$

dengan $\beta = v \frac{\Delta t}{\Delta^2 y}$, diperoleh persamaan berikut:

$$u_i^n = -\beta u_{i+1}^{n+1} + (1 + 2\beta)u_i^{n+1} - \beta u_{i-1}^{n+1}$$

atau

$$D_i = a_i u_{i+1}^{n+1} + b_i u_i^{n+1} + c_i u_{i-1}^{n+1}$$

Untuk memperoleh solusi, akan dibentuk matriks $Au = D$

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & & & \\ c_2 & b_2 & a_2 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & c_{m-1} & b_{m-1} & a_{m-1} \\ & & & & & & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m-1}^{n+1} \\ u_m^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{m-1} \\ D_m \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} b_1 u_1^{n+1} + a_1 u_2^{n+1} &= D_1 \\ c_2 u_1^{n+1} + b_2 u_2^{n+1} + a_2 u_3^{n+1} &= D_2 \\ \vdots & \\ c_{m-1} u_{m-2}^{n+1} + b_{m-1} u_{m-1}^{n+1} + a_{m-1} u_m^{n+1} &= D_{m-1} \\ c_m u_{m-1}^{n+1} + b_m u_m^{n+1} &= D_m \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut, dalam penelitian ini akan digunakan Algoritma Thomas. Algoritma Thomas adalah salah satu penyelesaian matriks tridiagonal yang efisien (Wei *dkk*, 2013). Algoritma Thomas mempunyai dua tahap yaitu: eliminasi maju dan substitusi mundur. Pada sistem persamaan diatas, tahap pertama adalah dengan melakukan eliminasi diagonal bawah pada sistem persamaan linier, dengan mengalikan c_2 pada baris pertama, sehingga diperoleh

$$c_2 b_1 u_1^{n+1} + c_2 a_1 u_2^{n+1} = c_2 D_1$$

dan mengalikan b_1 pada baris kedua, sehingga diperoleh

$$b_1 c_2 u_1^{n+1} + b_1 b_2 u_2^{n+1} + b_1 a_2 u_3^{n+1} = b_1 D_2$$

dengan mengurangi baris kedua dengan baris pertama, maka baris kedua ditulis sebagai berikut

$$(b_1b_2 - c_2a_1)u_2^{n+1} + b_1a_2u_3^{n+1} = b_1D_2 - c_2D_1$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\left(b_2 - \frac{c_2a_1}{b_1}\right)u_2^{n+1} + a_2u_3^{n+1} = D_2 - \frac{c_2}{b_1}D_1$$

Misalkan

$$D'_2 = D_2 - \frac{c_2}{b_1}D_1$$

dan

$$b'_2 = b_2 - \frac{c_2a_1}{b_1}$$

maka dapat diperoleh

$$b'_2u_2^{n+1} + a_2u_3^{n+1} = D'_2$$

Proses ini dilakukan sampai baris ke- m sehingga diagonal bawah tereliminasi seperti matriks berikut

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & & & \\ & b'_2 & a_2 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & b'_{m-1} & a_{m-1} \\ & & & & & & b'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m-1}^{n+1} \\ u_m^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D'_{m-1} \\ D'_m \end{bmatrix}$$

Pada tahap kedua dilakukan substitusi mundur dengan:

$$u_m^{n+1} = \frac{D'_m}{b'_m}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi mundur untuk memperoleh solusi u_{m-1}^{n+1} sampai dengan u_1^{n+1} . Secara umum, untuk memperoleh solusi u_i^{n+1} dapat dituliskan sebagai berikut $u_i^{n+1} = \frac{D_i - a_i u_{i+1}^{n+1}}{b_i}, i = m-1, m-2, \dots, 1$.

BAB 3

METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan mengenai tahapan-tahapan penelitian, tempat penelitian, dan jadwal penelitian untuk menyelesaikan permasalahan magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran dan medan magnet. Adapun tahapan-tahapan dan tempat penelitiannya adalah sebagai berikut.

3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dikaji beberapa model aliran fluida nano pada lapisan batas yang mengalir melewati bola dengan pengaruh magnetohidrodinamik yang telah dihasilkan dari peneliti-peneliti sebelumnya dan yang dikaji dalam penelitian ini.

2. Pembangunan Model Matematika

Pada tahap ini dilakukan dalam beberapa langkah:

- i Penurunan persamaan konversi massa dan hukum-hukum Fisika yang berkaitan dengan permasalahan.
- ii Penentuan kondisi batas dengan melakukan pengamatan terhadap aliran fluida yang melewati bola bermagnet.
- iii Persamaan kemudian dirubah secara berturut-turut menjadi model dimensional dan model non-dimensional.
- iv Mentransformasikan persamaan pembangun non-dimensional menjadi persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi aliran (*stream function*).

3. Tahap Penyelesaian Model

Persamaan similaritas yang telah diperoleh diselesaikan dengan metode numerik *Euler Implicit*. Langkah langkah sebagai berikut:

- i Persamaan similaritas yang diperoleh didiskritisasikan dengan menggunakan metode beda hingga pusat.
- ii Menyelesaikan persamaan yang diperoleh menggunakan Algoritma Thomas.
- iii Menentukan koefisien matriks.

- iv Menentukan solusi pada saat $t + \Delta t$.
- 4. Tahap Simulasi

Pada tahap ini dilakukan dalam beberapa langkah:

 - i Membuat algoritma dari model yang diperoleh.
 - ii Algoritma dari model yang diperoleh, diimplementasi dalam bentuk program dengan menggunakan program Matlab.
 - iii Dengan menggunakan program yang telah dibuat, dilakukan simulasi dengan menggunakan beberapa nilai pada parameter dan variabel inputan. Hasil simulasi berupa kecepatan aliran dan temperatur fluida yang disajikan dalam bentuk grafik dan analisis.
- 5. Tahap Analisis dan Pembahasan

Tahap ini berisi analisis dan pembahasan dari hasil simulasi untuk mengetahui pengaruh konveksi campuran dan medan magnet dalam magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola di dalam fluida nano terhadap terhadap profil kecepatan dan temperatur pada lapisan batas.
- 6. Tahap Finalisasi

Pada tahap ini ditarik kesimpulan dari hasil analisis yang telah dilakukan dari tahap sebelumnya. kesimpulan dari hasil-hasil penelitian diberikan sebagai berikut

 - i Langkah-langkah pembangunan model matematika pada magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran.
 - ii Langkah-langkah penyelesaian model matematika pada magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran dengan metode *Euler Implicit*.
 - iii Dihasilkan grafik dari tahap simulasi yang menunjukkan pengaruh parameter magnetik, parameter konveksi campuran, bilangan Prandtl, dan *volume fraction* terhadap profil kecepatan dan temperatur.
- 7. Diseminasi Hasil Penelitian.

Hasil penelitian magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran akan diseminarkan pada bulan Juli 2018 dan diterbitkan pada jurnal internasional IREMOS (International Review On Modelling and Simulations)/International Journal of Engineering and Technology.

3.2 Tempat Penelitian

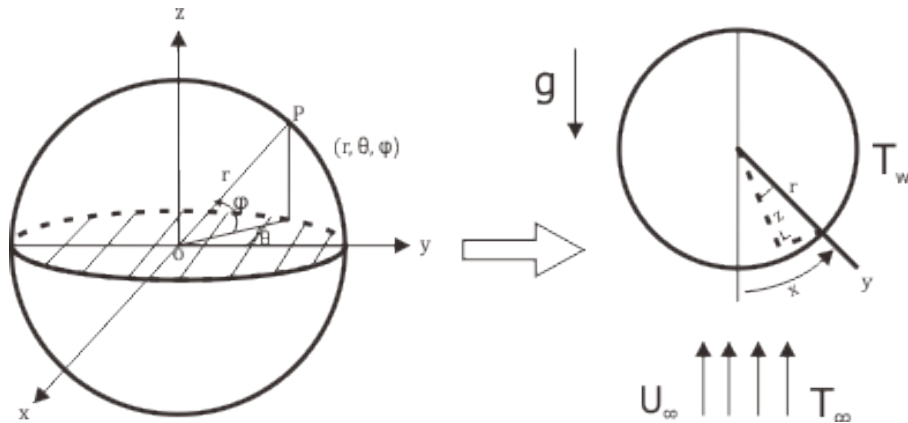
Penelitian ini dilaksanakan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem, Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

BAB 4 MODEL MATEMATIKA

Bab ini menjelaskan mengenai proses pembentukan persamaan pembangun dari magnetohidrodinamik fluida nano tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati bola dipengaruhi oleh konveksi campuran. Sesuai dengan gambaran *area* yang diamati, model fisik dari permasalahan ini menggunakan hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika sehingga diperoleh persamaan-persamaan pembangun dimensional yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier, dan persamaan energi. Selanjutnya, persamaan pembangun dimensional yang diperoleh diubah menjadi persamaan non-dimesional dan transformasi ke persamaan similaritas.

Pada penelitian ini, fluida yang digunakan adalah fluida nano. Fluida nano tidak mengandung medan magnet mengalir melewati bola yang bermagnet. Aliran fluida nano sebelum melewati bola bermagnet memiliki kecepatan sebesar U_∞ dan temperatur sebesar T_∞ . Gambaran dari bola bermagnet ditunjukkan pada **Gambar 4.1**.

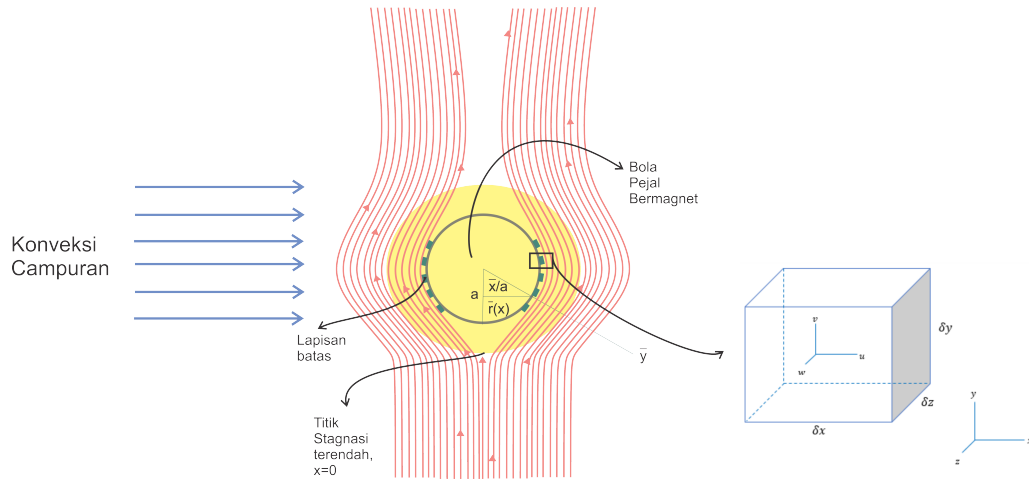
Pada penelitian ini bola yang diamati adalah bola pejal bermagnet



Gambar 4.1: Koordinat Bola Pejal

sehingga aliran fluida nano tidak dapat menembus bola. Aliran fluida hanya melewati permukaan bola sehingga sehingga kecepatan pada arah sumbu z diabaikan. Fluida nano yang mengalir dipengaruhi oleh konveksi campuran dan medan magnet yang berasal dari bola. Fluida nano mengalami gesekan dengan permukaan bola bermagnet membentuk lapisan batas berupa elemen kecil dan tipis. Kontruksi dan gambaran dari lapisan pada yang terbentuk pada permukaan bola ditunjukkan pada **Gambar 4.2**.

Pada **Gambar 4.2**., Aliran fluida mengalir dari bawah ke atas. Aliran fluida yang diamati yang berada pada didaerah sekitar titik stagnasi bawah



Gambar 4.2: Bentuk Fisis Objek Penelitian

yang berarti pada posisi $x = 0^\circ$. Fluida nano yang mengalir melewati bola tersebut dipengaruhi oleh medan magnet yang berasal dari bola dan konveksi campuran. Lapisan batas yang terbentuk berupa elemen kecil berbentuk kubus sebagai kontrol volume. Dari kontrol volume tersebut dapat ditinjau massa, momentum dan energi dari fluida nano.

4.1 Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini adalah persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier, dan persamaan energi yang diuraikan dari hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika. Berikut ini diuraikan pembangunan persamaan-persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini.

4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas merupakan persamaan mengenai jumlah massa dalam suatu volume kontrol yang dihitung dalam setiap satuan waktu. Jumlah massa tersebut merupakan selisih dari jumlah massa yang masuk dan keluar dari permukaan kontrol. Prinsip dari persamaan kontinuitas adalah hukum Kekekalan Massa. Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa jumlahan massa pada suatu sistem (M_{sys}) adalah konstan, dengan kata lain bahwa tidak ada perubahan massa dalam sistem sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dan

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho_{fn} dV \quad (4.2)$$

dengan

M_{sys} : massa pada suatu sistem

ρ_{fn} : densitas fluida nano

V : volume

dengan substitusi Persamaan (4.2) ke dalam Persamaan (4.1) diperoleh

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \int_{sys} \rho_{fn} dV = 0 \quad (4.3)$$

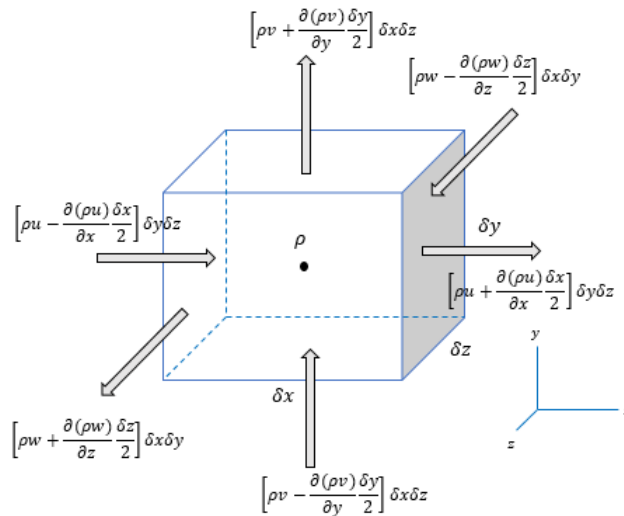
Teorema yang digunakan untuk pendekatan sistem kontrol volume pada suatu elemen pada fluida adalah Teorema transpor Reynold. Teorema transpor Reynold diberikan sebagai berikut

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho_{fn} dV + \iint_{cs} \rho_{fn} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.4)$$

\mathbf{V} merupakan perkalian dari komponen kecepatan fluida, $d\mathbf{S}$ adalah perkalian vektor normal (\hat{n}) terhadap permukaan dS , dan dV adalah kontrol volume fluida. Dengan menggunakan teorema Gauss, integral permukaan pada Persamaan (4.4) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho_{fn} dV + \iiint_{cv} \nabla \cdot (\rho_{fn} \mathbf{V}) dV = 0 \quad (4.5)$$

Dengan melakukan pendekatan volume kontrol untuk menggambarkan elemen-elemen kecil dari fluida yang berbentuk kubus sangat kecil dengan dimensi $(\delta x \delta y \delta z)$ dapat dilihat pada **Gambar 4.3**.



Gambar 4.3: Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur

Pada **Gambar 4.2** terlihat bahwa laju aliran massa menembus per satuan luasan permukaan searah sumbu x dalam per satuan waktu didefinisikan dengan ρu . Laju aliran massa pada permukaan kanan ($x + \frac{\delta x}{2}$) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\rho_{fn} u_{x+\frac{\delta x}{2}} = \rho_{fn} u + \frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.6)$$

dan laju aliran massa pada permukaan kiri ($x - \frac{\delta x}{2}$) adalah

$$\rho_{fn} u_{x-\frac{\delta x}{2}} = \rho_{fn} u - \frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.7)$$

dari Persamaan (4.6) dan Persamaan (4.7) dapat diperoleh laju aliran massa yang menembus permukaan sisi kanan dan sisi kiri elemen pada arah sumbu x sebagai berikut

$$\left(\rho_{fn} u + \frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z - \left(\rho_{fn} u - \frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

dengan langkah yang sama untuk laju aliran massa menembus per satuan luasan permukaan searah sumbu y dan z dalam per satuan waktu diperoleh sebagai berikut
searah sumbu y

$$\left(\rho_{fn} v + \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z - \left(\rho_{fn} v - \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z = \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

searah sumbu z

$$\left(\rho_{fn} w + \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y - \left(\rho_{fn} w - \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y = \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

sehingga laju aliran massa total adalah

$$\left[\frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0$$

Berdasarkan teorema transpor Reynold, maka laju aliran massa terhadap perubahan waktu adalah

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[\frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.8)$$

dengan membagi kedua ruas dengan $\delta x \delta y \delta z$ diperoleh

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{fn}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{fn}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{fn}w)}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

atau dapat dituliskan dalam notasi vektor sebagai berikut

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{fn} \mathbf{V}) = 0 \quad (4.10)$$

pada penelitian ini, aliran fluida diasumsikan bersifat *incompressible*, dengan kata lain densitas fluida sangat kecil dan tidak memberikan pengaruh yang signifikan $\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} = 0$ sehingga

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Oleh karena pada penelitian ini digunakan bola pejal bermagnet, maka persamaan kontinuitas juga dipengaruhi oleh jari-jari bola (r), maka persamaan kontinuitas magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak dipengaruhi oleh konveksi campuran yang mengalir melewati bola bermagnet adalah

$$\left[\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{w})}{\partial \bar{z}} \right] = 0 \quad (4.11)$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah permukaan bola sehingga kecepatan pada arah sumbu z diabaikan. Oleh karena itu, Persamaan memomentum yang diamati hanya pada arah sumbu x dan y diberikan sebagai berikut

$$\left[\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{y}} \right] = 0 \quad (4.12)$$

4.1.2 Persamaan Momentum

Pergerakan dari partikel fluida nano mengakibatkan terjadinya tumbukan atau momentum. Prinsip dari persamaan momentum adalah hukum Newton II. Hukum Newton II menyatakan bahwa besar momentum terhadap perubahan waktu sama dengan besarnya keseluruhan gaya-gaya yang bekerja pada sistem tersebut sehingga dapat dituliskan dalam bentuk integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho_{fn} \mathbf{V} dV + \iint_{cs} \rho_{fn} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \cdot dS = \iiint_{cv} \mathbf{F} dV \quad (4.13)$$

Pada Persamaan (4.13) terdapat integral permukaan, sehingga dengan menggunakan teorema Gauss diperoleh

$$\iiint_{cv} \rho_{fn} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dV + \iiint_{cv} \rho_{fn} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} dV = \iiint_{cv} \mathbf{F} dV \quad (4.14)$$

karena $\nabla \cdot \mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ maka Persamaan (4.14) juga dapat dituliskan sebagai berikut

$$\rho_{fn} \left[\iiint_{cv} \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) dV \right] = \iiint_{cv} \mathbf{F} dV \quad (4.15)$$

Jika dituliskan dalam bentuk turunan, maka Persamaan (4.15) dapat ditulis sebagai berikut

$$\rho_{fn} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \sum \mathbf{F} \quad (4.16)$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = \mathbf{F}_s - \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_B \quad (4.17)$$

Gaya-gaya yang bekerja pada $\sum F$ merupakan gaya permukaan F_s , gaya magnet F_M dan gaya apung F_B . Gaya-gaya yang bekerja pada permukaan sebuah elemen kubus kecil dari fluida berupa tegangan-tegangan. Tegangan tersebut merupakan tegangan normal (σ) dan tegangan geser (τ). Gaya-gaya yang bekerja pada arah sumbu x dapat diberikan sebagai berikut

$$F_{sx} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (4.18)$$

Gaya-gaya yang bekerja pada sumbu y adalah

$$F_{sy} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (4.19)$$

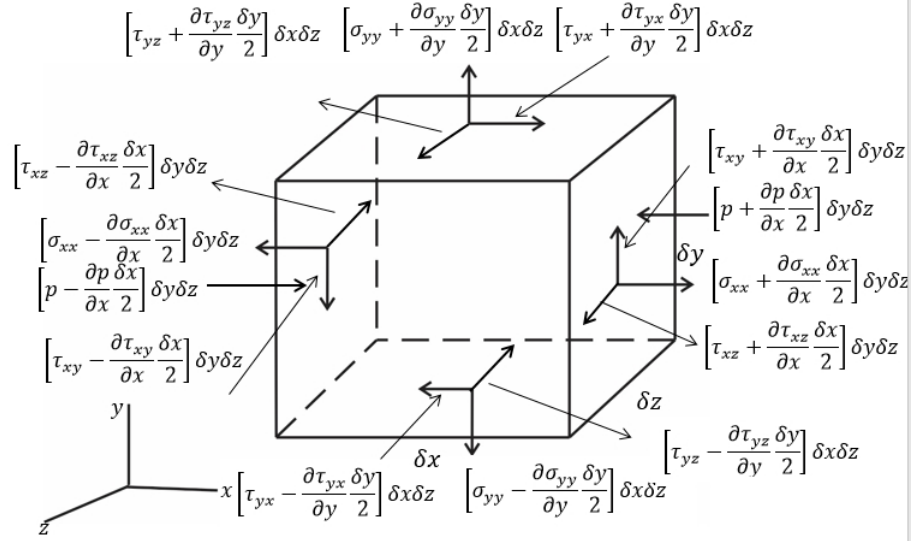
dan gaya-gaya yang bekerja pada sumbu z adalah

$$F_{sz} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (4.20)$$

Dengan melakukan pendekatan volume kontrol untuk menggambarkan elemen-elemen kecil dari fluida yang berbentuk kubus sangat kecil dengan dimensi ($\delta x \delta y \delta z$) maka dapat dikonstruksi persamaan momentum linier pada **Gambar 4.4**.

Resultan gaya permukaan merupakan jumlahan gaya permukaan pada sumbu x , sumbu y , dan sumbu z . Resultan gaya permukaan yang terbentuk dari Persamaan (4.16) dan Persamaan (4.17) diperoleh sebagai berikut

$$\mathbf{F}_s = F_{sx}i + F_{sy}j + F_{sz}k$$



Gambar 4.4: Komponen Tegangan pada Permukaan Elemen Fluida

atau dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
 F_s = & \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) i + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) j \\
 & + \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) k
 \end{aligned}$$

Pada penelitian ini, diasumsikan pada fluida nano yang tak mampu mampat (*incompressible*) sehingga tegangannya sebanding dengan laju deformasi, sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

i Tegangan Normal

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2\mu_{fn} \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \sigma_{yy} &= 2\mu_{fn} \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \sigma_{zz} &= 2\mu_{fn} \frac{\partial w}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

ii Tegangan Geser

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu_{fn} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu_{fn} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
\tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu_{fn} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Jumlahan dari tegangan normal dan tegangan geser diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu_{fn} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{fn} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{fn} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \\
&= 2\mu_{fn} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
&= \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\
&= \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu_{fn} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&= \mu_{fn} \nabla^2 u + \mu_{fn} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \\
&= \mu_{fn} \nabla^2 u
\end{aligned}$$

maka gaya geser untuk arah sumbu x dapat ditulis

$$F_{sx} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn} \nabla^2 u$$

dengan cara yang sama, maka gaya geser untuk arah sumbu y diperoleh

$$F_{sy} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{fn} \nabla^2 v$$

dan gaya geser untuk arah sumbu z diperoleh

$$F_{sz} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_{fn} \nabla^2 w$$

sehingga, gaya permukaan total diperoleh sebagai berikut diperoleh

$$F_s = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} \tag{4.23}$$

Selain gaya permukaan F_s yang bekerja, ada juga pengaruh dari gaya magnetik atau gaya Lorentz F_M , yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$F_M = J \times B \quad (4.24)$$

$$J = \sigma(E + V \times B) \quad (4.25)$$

dan

$$B = b + B_0 \quad (4.26)$$

dengan

σ : konduktivitas listrik

J : kerapatan arus listrik

B : total medan magnet yang terjadi pada sistem

E : medan listrik

b : besar medan magnet dari fluida yang terinduksi bola bermagnet

B_0 : besar medan magnet dari Bola

dengan melakukan substitusi Persamaan (4.25) ke dalam Persamaan (4.24) maka diperoleh

$$F_M = \sigma(E + \mathbf{V} \times B) \times B \quad (4.27)$$

karena dalam penelitian ini diasumsikan tidak ada tegangan pada aliran fluida, sehingga tidak ada medan listrik ($E = 0$), maka Persamaan (4.27) menjadi

$$F_M = \sigma(\mathbf{V} \times B) \times B \quad (4.28)$$

dengan melakukan substitusi persamaan (4.26) ke dalam persamaan (4.28) maka diperoleh

$$F_M = \sigma(\mathbf{V} \times (b + B_0)) \times (b + B_0)$$

karena besar induksi magnetik pada fluida $b = 0$ maka dapat dituliskan sebagai berikut

$$F_M = \sigma(\mathbf{V} \times B_0) \times (B_0) \quad (4.29)$$

dengan

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \times B_0) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow (\mathbf{V} \times B_0) &= (vB_0)\mathbf{i} - (uB_0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{aligned}$$

maka

$$[(\mathbf{V} \times B_0)] \times (B_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v(B_0) & -u(B_0) & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{V} \times B_0) \times B_0 &= (-u(B_0)^2)i - (v(B_0)^2)j + 0k \\(\mathbf{V} \times B_0) \times B_0 &= (-u(B_0)^2, -v(B_0)^2, 0)\end{aligned}$$

maka diperoleh F_M adalah

$$F_M = \sigma(-u(B_0)^2, -v(B_0)^2, 0)$$

atau dapat dinyatakan dalam notasi vektor sebagai berikut

$$F_M = -\sigma(B_0)^2 \bar{\mathbf{V}} \quad (4.30)$$

Selain gaya permukaan F_s dan gaya magnetik F_M , persamaan momentum juga dipengaruhi oleh gaya apung F_B (*buoyancy force*). Gaya apung dapat dituliskan sebagai berikut

$$F_B = \rho g \delta_x \delta_y \delta_z$$

dan untuk tekanan p dapat dituliskan dengan

$$p = p_d + p_h$$

dengan

p_d : tekanan dinamik

p_h : tekanan hidrostatik

bentuk gradien tekanan yang disebabkan oleh tekanan hidrostatik dapat dituliskan sebagai berikut

$$\nabla p_h = \rho_\infty g \quad (4.31)$$

dengan

ρ_∞ : massa jenis fluida diluar lapisan batas.

Selanjutnya, bentuk ∇p dapat dituliskan sebagai berikut

$$\nabla p = \nabla p_d + \nabla p_h \quad (4.32)$$

dengan substitusi persamaan (4.31) pada persamaan (4.32) maka diperoleh

$$\nabla p = \nabla p_d + \rho_\infty g$$

selanjutnya, p_d ditulis tanpa subskrip "d".

Kemudian dengan mengelompokkan vektor $i, j, \text{ dan } k$ untuk sumbu $x, y, \text{ dan } z$, maka diperoleh :

persamaan momentum linier sumbu x adalah

$$\begin{aligned}\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{u} \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{x}}\end{aligned}$$

persamaan momentum linier sumbu y adalah

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{v} \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{y}} \end{aligned}$$

dan persamaan momentum linier sumbu z adalah

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{z}} \end{aligned}$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah permukaan bola sehingga kecepatan pada arah sumbu z diabaikan. Oleh karena itu, Persamaan memomentum yang diamati hanya pada arah sumbu x dan y diberikan sebagai berikut persamaan momentum linier sumbu x adalah

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{u} \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{x}} \end{aligned}$$

dan persamaan momentum linier sumbu y adalah

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{v} \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{y}} \end{aligned}$$

atau dapat ditulis dalam notasi vektor sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{\mathbf{u}} \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

dan persamaan momentum linier sumbu y adalah

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{v} \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{y}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.1.3 Persamaan Energi

Tumbukan antar partikel mengakibatkan terjadinya energi panas. Selain itu juga, panas yang ditimbulkan juga berasal dari adanya pengaruh konveksi campuran yaitu panas yang timbul secara alami dan adanya sumber panas

lain. Prinsip dari persamaan energi adalah hukum I Termodinamika secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W \quad (4.35)$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho_{fn} e dV + \iint_{cs} \rho_{fn} e \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.36)$$

Terdapat integral permukaan pada persamaan di atas sehingga dengan menggunakan teorema Gauss, pada Persamaan (4.36) menjadi

$$\iiint_{cv} \rho_{fn} \frac{\partial e}{\partial t} dV + \iiint_{cv} \rho_{fn} \nabla \cdot e \mathbf{V} dV = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.37)$$

atau dapat dituliskan

$$\rho_{fn} \left(\iiint_{cv} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot e \mathbf{V} \right) dV \right) = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.38)$$

karena

$$\begin{aligned} \nabla \cdot e \mathbf{V} &= e \cdot \nabla \mathbf{V} + e \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \nabla \cdot e \mathbf{V} &= e \cdot \nabla \mathbf{V} \end{aligned}$$

maka Persamaan (4.38) menjadi

$$\rho_{fn} \left(\iiint_{cv} \frac{De}{Dt} dV \right) = \dot{Q} - \dot{W}$$

$$\iiint_{cv} \rho_{fn} \frac{De}{Dt} dV = \dot{Q} - \dot{W}$$

laju perpindahan energi dari elemen fluida per satuan volume dituliskan sebagai

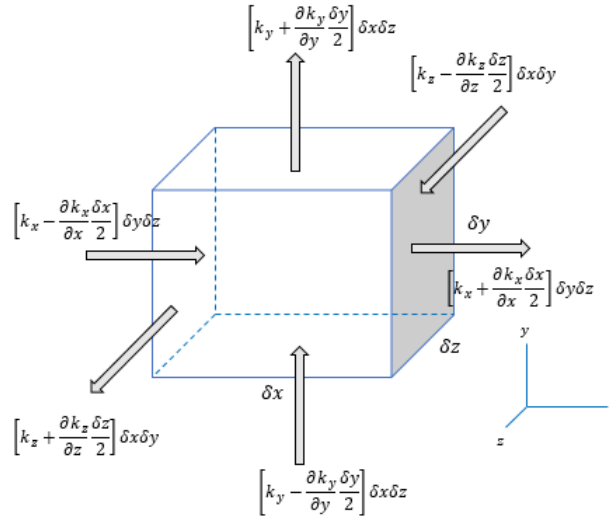
$$\rho_{fn} \frac{De}{Dt}$$

pada penelitian ini, benda diasumsikan diam sehingga tidak ada usaha pada sistem, dengan kata lain $\dot{W} = 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho_{fn} dV + \int_{cs} e \rho_{fn} (\mathbf{V} \cdot \hat{n}) dS = \dot{Q}$$

atau

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{V}) \right) = (\dot{Q}_{innetto})_{sys} \quad (4.39)$$



Gambar 4.5: Komponen *Heat Flux* pada Volume Kontrol

Misalkan k adalah *heat flux* yang merupakan laju transfer energi panas melalui suatu permukaan yang terjadi dalam volume kontrol digambarkan pada **Gambar 4.5**.

Laju netto dari penerusan panas suatu partikel fluida dapat dihitung dari perbedaan kalor yang masuk dengan kalor yang keluar pada arah $-x$, arah $-y$, dan arah $-z$ didefinisikan sebagai berikut.

Searah sumbu $-x$

$$\left(k_x + \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z - \left(k_x - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z = -\frac{\partial(k_x)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.40)$$

Searah sumbu $-y$

$$\left(k_y + \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \frac{\delta y}{2}\right) \delta x \delta z - \left(k_y - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \frac{\delta y}{2}\right) \delta x \delta z = -\frac{\partial(k_y)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.41)$$

Searah sumbu $-z$

$$\left(k_z + \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y - \left(k_z - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y = -\frac{\partial(k_z)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.42)$$

dari Persamaan (4.39)-(4.41) dapat diperoleh total laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem adalah

$$\left(-\frac{\partial(k_x)}{\partial x} - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} - \frac{\partial(k_z)}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z = (-\nabla \cdot \mathbf{k}) \delta x \delta y \delta z \quad (4.43)$$

Hukum Fourier merupakan hukum mengenai perpindahan panas dengan konduksi yang berhubungan dengan gradien temperatur. Hukum Fourier

didefinisikan sebagai berikut.

$$k_x = -k_{fn} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$k_y = -k_{fn} \frac{\partial T}{\partial y}$$

dan

$$k_z = -k_{fn} \frac{\partial T}{\partial z}$$

dengan menggunakan notasi vektor dapat dituliskan menjadi

$$\mathbf{k} = -k_{fn} \nabla T \quad (4.44)$$

dengan menggunakan Persamaan (4.43) diperoleh

$$(-\nabla \cdot \mathbf{k}) \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) \delta x \delta y \delta z \quad (4.45)$$

dengan melakukan substitusi Persamaan (4.44) pada Persamaan (4.38) diperoleh

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{V}) \right) \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) \delta x \delta y \delta z$$

kedua ruas dibagi oleh $\delta x \delta y \delta z$ diperoleh

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) \quad (4.46)$$

Selanjutnya untuk Entalpi spesifik h didefinisikan sebagai berikut (Leal, 2007).

$$h \equiv e + \frac{p}{\rho_{fn}}$$

dengan p adalah tekanan, e adalah energi total, dan ρ_{fn} adalah densitas fluida nano. Laju perubahan entalpi diperoleh

$$\rho_{fn} \frac{\partial e}{\partial t} = \rho_{fn} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho_{fn}} \right) \right)$$

dengan melakukan diferensiasi pada $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho_{fn}} \right)$ diperoleh

$$\rho_{fn} \frac{\partial e}{\partial t} = \rho_{fn} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho_{fn}} \frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t}$$

karena p konstan maka diperoleh

$$\rho_{fn} \frac{\partial e}{\partial t} = \rho_{fn} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.47)$$

Selanjutnya, untuk reaksi panas H didefinisikan oleh (Leal, 2007) sebagai berikut.

$$H = mc_p \Delta T$$

$$\frac{H}{m} = c_p \Delta T$$

karena $h = \frac{H}{m}$ maka diperoleh

$$h = c_p \Delta T \quad (4.48)$$

dengan c_p adalah kalor spesifik dan T adalah suhu, sehingga Persamaan (4.47) menjadi

$$\frac{\partial e}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.49)$$

dengan substitusi Persamaan (4.49) pada Persamaan (4.46) diperoleh

$$\rho_{fn} c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) \quad (4.50)$$

dengan

$$\nabla \cdot (T \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T) + T (\nabla \cdot \mathbf{V})$$

berdasarkan persamaan kontinuitas, bahwa $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ maka

$$\nabla \cdot (T \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \quad (4.51)$$

dengan substitusi Persamaan (4.51) pada Persamaan (4.50) diperoleh

$$\rho_{fn} c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) \quad (4.52)$$

dan untuk $\mathbf{V} \cdot (\nabla T)$ diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{V} \cdot (\nabla T) = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V} \cdot (\nabla T) = \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

dan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) &= k_{fn} \nabla \cdot (\nabla T) \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) &= k_{fn} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

maka Persamaan (4.50) menjadi

$$\rho_{fn}c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k_{fn} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

kedua ruas dibagi oleh $\rho_{fn}c_p$ diperoleh

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{k_{fn}}{\rho_{fn}c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

dengan substitusi $\alpha_{fn} = \frac{k_{fn}}{\rho_{fn}c_p}$, Persamaan (4.52) menjadi

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah permukaan bola sehingga pada arah sumbu z diabaikan. Oleh karena itu, Persamaan energi yang diamati hanya pada arah sumbu x dan y diberikan sebagai berikut

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.53)$$

4.2 Persamaan Pembangun Dimensional

Persamaan pembangun yang digunakan pada aliran fluida nano yang bersifat *unsteady* dan *incompressible* adalah

i Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.54)$$

ii Persamaan Momentum

Pada sumbu x

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{u} \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_{\infty}) g_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Pada sumbu y

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{v} \\ &+ (\rho_{fn} - \rho_{\infty}) g_{\bar{y}} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Sesuai dengan pendekatan Boussinesq, yaitu semua variabel berpengaruh dalam persamaan momentum diabaikan, kecuali kerapatan. Pendekatan Boussinesq ini diterapkan pada persamaan momentum untuk mendekati

perbedaan kerapatan yang menyebabkan adanya aliran sebagai akibat dari interaksi antara gaya gravitasi dan tekanan hidrostatik seperti temperatur. Menurut (Leal, 1992), diasumsikan bahwa nilai maksimum $\bar{T} - T_\infty$ kecil sehingga berdasarkan definisi pendekatan Deret Taylor yaitu

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_{fn}} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) + O(\bar{T} - T_\infty)^2$$

dengan menghilangkan bagian yang berorder tinggi, maka diperoleh

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_{fn}} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty)$$

untuk $\beta(\bar{T} - T_\infty)$ diperoleh

$$\frac{\rho_\infty - \rho_{fn}}{\rho_{fn}} = \beta(\bar{T} - T_\infty)$$

atau

$$\rho_{fn} - \rho_\infty = -\rho_{fn}\beta(\bar{T} - T_\infty) \quad (4.57)$$

dengan β adalah koefisien ekspansi panas yang didefinisikan sebagai berikut

$$\beta = -\frac{1}{\rho_{fn}} \left(\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial \bar{T}} \right)_p$$

Dengan substitusi Persamaan (4.57) pada Persamaan (4.55) dan Persamaan (4.56) diperoleh

Persamaan momentum linier pada sumbu x

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} \quad (4.58)$$

Persamaan momentum linier pada sumbu y

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} \quad (4.59)$$

iii Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.60)$$

Pada penelitian ini menggunakan kondisi batas yaitu

$\bar{t} = 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty$ untuk setiap \bar{x}, \bar{y}

$\bar{t} > 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w$ pada saat $\bar{y} = 0$

$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{u} = \bar{v}, \bar{T} = T_\infty$ saat $\bar{y} \rightarrow \infty$

4.3 Persamaan Pembangun Non-Dimensional

Persamaan pembangun dimensional yang telah diperoleh, kemudian ditransformasikan ke dalam persamaan non-dimensional dengan menggunakan variabel non-dimensional. Hal ini dilakukan untuk mempermudah proses komputasi. Variabel-variabel non-dimensional didefinisikan sebagai berikut (Widodo *dkk*, 2016a).

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; t = \frac{U_{\infty} \bar{t}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}$$

$$T = \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}; p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fn} U_{\infty}^2}; r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}; u_e(x) = \frac{\bar{u}_e(x)}{U_{\infty}}$$

dengan

Re : bilangan Reynolds, $Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu_{fn}}$

ρ_{fn} : densitas fluida nano

p : tekanan

Menurut (Kasim, 2014), percepatan gravitasi didefinisikan sebagai berikut

$$g_{\bar{x}} = -g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

$$g_{\bar{y}} = g \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi variabel non-dimensional dan substitusi parameter-parameter tak berdimensi pada subbab 2.6 ke dalam persamaan pembangun dimesional, sehingga persamaan pembangun non-dimensional diperoleh sebagai berikut.

4.3.1 Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{y}} = 0 \quad (4.61)$$

dengan substitusi

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}; r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}$$

maka Persamaan (4.61) menjadi

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.62)$$

4.3.2 Persamaan Momentum

i Pada sumbu x

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{u} \\ &- \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{u} \\ &- \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (4.63)$$

dengan substitusi

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_\infty}; p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fn} U_\infty^2}; t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a};$$

$$T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}; g_{\bar{x}} = -g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

maka Persamaan (4.63) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{Re v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu \\ &+ \lambda T \sin x \end{aligned} \quad (4.64)$$

ii Pada sumbu y

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{v} \\ &- \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{v} \\ &- \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} \end{aligned} \quad (4.65)$$

dengan substitusi

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_\infty}; p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fn} U_\infty^2}; t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a};$$

$$T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}; g_{\bar{y}} = g \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

maka persamaan (4.65) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{M}{Re} v \\ &\quad - \frac{\lambda}{Re^{1/2}} T \cos x \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.3.3 Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.67)$$

dengan substitusi

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_\infty}; t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a}; T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

maka Persamaan (4.67) menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.68)$$

Berdasarkan variabel-variabel tak berdimensi di atas, kondisi awal dan kondisi batas diberikan sebagai berikut

$t = 0 : u = v = 0, T = 0$ untuk setiap x, y

$t > 0 : u = v = 0, T = 1$ ketika $y = 0$

$u = u_e(x), T = 0$ ketika $y \rightarrow \infty$

4.4 Teori Lapisan Batas

Dari model matematika non-dimensional diperoleh

i Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

ii Persamaan Momentum sumbu x

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{Re v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu \\ &\quad + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

iii Persamaan Momentum sumbu y

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{M}{Re} v \\ &\quad - \frac{\lambda}{Re^{1/2}} T \cos x \end{aligned}$$

iv Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Setelah transformasi persamaan pembangun dimensional menjadi non-dimensional, langkah selanjutnya adalah melakukan pendekatan lapisan batas. Dengan menggunakan pendekatan lapisan batas, maka bilangan Reynolds mendekati tak hingga ($Re \rightarrow \infty$) sehingga $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ dengan kata lain, lapisan batas yang terbentuk sangat tipis, maka diperoleh persamaan baru yaitu

i Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

ii Persamaan Momentum Sumbu x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu + \lambda T \sin x$$

iii Persamaan Momentum Sumbu y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

iv Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Pada penelitian ini, fluida yang digunakan adalah fluida nano. Oleh karena itu, Persamaan model diatas dibawa kedalam bentuk fluida nano dengan substitusi variabel-variabel yang berhubungan antara fluida nano dengan fluida dasar diberikan sebagai berikut (Rabeti, 2014).

Densitas Fluida Nano

$$\rho_{fn} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s$$

Viskositas

$$\mu_{fn} = \frac{\mu_f}{(1 - \chi)^{2.5}}$$

Kalor spesifik Fluida Nano

$$(\rho C_p)_{fn} = (1 - \chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s$$

Konduktifitas termal

$$\frac{k_{fn}}{k_f} = \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)}$$

dengan substitusi variabel-variabel diatas maka persamaan pembangun dengan pendekatan lapisan batas menjadi

i Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.69)$$

ii Persamaan Momentum sumbu x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu + \lambda T \sin x$$

dengan substitusi

$$v_{fn} = \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}$$

atau

$$v_{fn} = \frac{\mu_f}{(1 - \chi)^{2.5}} \frac{1}{(1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s}$$

$$v_{fn} = v_f \left(\frac{1}{(1 - \chi)^{2.5}} \frac{1}{(1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \right)$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_f}{v_f (1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ Mu + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ Mu + \lambda T \sin x \end{aligned} \quad (4.70)$$

iii Persamaan Momentum Sumbu y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.71)$$

iv Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

dengan substitusi

$$\frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} = \frac{k_{fn}}{(\rho c_p)_{fn}} \frac{(\rho c_p)_f}{k_f}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} &= \frac{\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)} k_f}{(1 - \chi)(\rho c_p)_f + \chi(\rho c_p)_s} \frac{(\rho c_p)_f}{k_f} \\ \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} &= \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)} \frac{1}{(1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right)} \end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Penyederhanaan model matematika non-dimensional pada lapisan batas untuk persamaan momentum sumbu y , tekanan dari aliran p bebas dari y karena aliran yang diselesaikan adalah aliran dua dimensi, menunjukkan bahwa tekanan dari aliran p bergantung hanya pada sumbu x . Dengan demikian hanya terdapat satu persamaan momentum yang tersisa pada sistem yaitu pada sumbu x . Berikut diberikan evaluasi persamaan pada luar lapisan batas diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \\ &+ Mu_e + \lambda T \sin x \end{aligned} \quad (4.73)$$

dengan kecepatan aliran bebas dalam bentuk bola (Anderson, 2011) diberikan sebagai berikut

$$u_e = \frac{3}{2} \sin x \quad (4.74)$$

dengan menggunakan kecepatan aliran bebas pada Persamaan (4.74) maka diperoleh

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0; \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0; \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0$$

dengan melakukan substitusi persamaan (4.74) pada persamaan (4.73), maka diperoleh

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + M u_e + \lambda T \sin x$$

Pada saat $T = 0$ diperoleh

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + M u_e$$

atau dapat dituliskan seperti berikut

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - M u_e \quad (4.75)$$

dengan substitusi persamaan (4.75) pada persamaan (4.70), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - M u_e \right) + \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ M u + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ M(u - u_e) + \lambda T \sin x \end{aligned} \quad (4.76)$$

4.5 Fungsi Alir (*Stream Function*)

Pada penelitian ini hanya terdapat dua komponen kecepatan yaitu u dan v yang alirannya berada pada bidang x dan y . Untuk menghubungkan dua fungsi kecepatan tersebut maka dikenalkan sebuah fungsi alir (*stream function*). Dengan adanya fungsi alir akan menyederhanakan banyaknya persamaan dan membuat komputasi hanya dalam satu variabel. Fungsi alir ini dinyatakan sebagai berikut (White, 2011).

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.77)$$

dan

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.78)$$

dengan melakukan substitusi Persamaan (4.77) dan Persamaan (4.78) pada persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi diperoleh

i Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.79)$$

ii Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ M(u - u_e) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + M \\ &\left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \\ &\left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned} \quad (4.80)$$

iii Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \\
& \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
& \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \\
& \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{4.81}
\end{aligned}$$

Kondisi batas dapat dituliskan dalam bentuk fungsi alir sebagai berikut

$$\begin{aligned}
t = 0 : \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = T = 0 \text{ untuk setiap } x, y \\
t > 0 : \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 1 \text{ ketika } y = 0 \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= u_e(x), T = 0 \text{ ketika } y \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

Hasil dari fungsi alir diperoleh bahwa persamaan kontinuitas dapat dihilangkan sehingga hanya terdapat dua persamaan, yaitu persamaan momentum dan persamaan energi.

4.6 Persamaan Similaritas

Persamaan similaritas adalah persamaan yang digunakan untuk mengetahui solusi waktu yang kecil $t \leq t^*$ dan solusi waktu besar $t > t^*$ dengan sebarang nilai t (Ningtyas, 2016). Hasil dari fungsi alir yang diperoleh kemudian ditransformasikan kedalam variabel similaritas yang terdiri dari dua tipe waktu yaitu untuk waktu kecil (*small time*) dan waktu besar (*large time*).

- i Untuk waktu kecil (*small time*) dengan $t \leq t^*$; t^* adalah sebarang nilai. Diberikan persamaan sebagai berikut

$$\Psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) ; \eta = \frac{y}{t^{1/2}} ; T = s(x, \eta, t) \tag{4.82}$$

- ii Untuk waktu besar (*large time*) dengan $t > t^*$; t^* adalah sebarang nilai. Diberikan persamaan sebagai berikut

$$\Psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t) ; Y = y ; T = S(x, Y, t) \tag{4.83}$$

dengan menerapkan Persamaan (4.82) dan Persamaan (4.83) pada Persamaan (4.80) dan Persamaan (4.81), persamaan pembangun untuk *small time* dan *large time* yaitu

4.6.1 Persamaan Momentum untuk *Small Time*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\ &+ M \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

dengan substitusi persamaan similaritas dan dengan substitusi $u_e(x) = u_e$, $r(x) = r$, dan $f(x, \eta, t) = f$ diperoleh

$$\begin{aligned} & - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ & - t u_e f \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \\ & \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + M t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \frac{\lambda T t}{u_e} \sin x \end{aligned} \quad (4.84)$$

Persamaan (4.84) dapat juga ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ &= t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ & - \frac{\lambda T t}{u_e} \sin x \end{aligned}$$

dengan menerapkan variabel similaritas pada persamaan momentum untuk *small time* adalah

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ &= t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ & - \frac{\lambda s t}{u_e} \sin x \end{aligned} \quad (4.85)$$

4.6.2 Persamaan Energi untuk *Small Time*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ = & \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dituliskan $u_e(x) = u_e$; $r(x) = r$; $s(x, \eta, t) = s$ dan dengan menerapkan variabel similaritas untuk *small time* pada persamaan energi maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ + & Prt \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt \left[\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.86) \end{aligned}$$

4.6.3 Persamaan Momentum untuk *Large Time*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \\ & \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

dengan substitusi persamaan similaritas untuk *large time* dan dengan substitusi $u_e(x) = u_e$, $r(x) = r$, dan $F(x, Y, t) = F$, diperoleh

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \\ = & \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] - M \left(\left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right) - 1 \right) \\ - & \frac{\lambda T \sin x}{u_e} \end{aligned}$$

dengan menerapkan variabel similaritas pada persamaan momentum untuk *large time* adalah

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + M \left(1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right) \right) \\
&- \frac{\lambda S \sin x}{u_e} \tag{4.87}
\end{aligned}$$

4.6.4 Persamaan Energi untuk *Large Time*

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

dengan substitusi persamaan similaritas untuk *large time* dan dengan substitusi $S(x, Y, t) = S$, maka persamaan similaritas pada persamaan energi untuk *large time* adalah

$$\begin{aligned}
& Pr \frac{\partial S}{\partial t} + Pr u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - Pr F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - Pr u_e \frac{1}{r} F \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - Pr u_e \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \\
&= \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}
\end{aligned}$$

dengan menerapkan variabel similaritas pada persamaan energi untuk *large time* adalah

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr \frac{\partial u_e}{\partial x} \\
& F \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr \left[\frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{1}{r} F \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right] \tag{4.88}
\end{aligned}$$

Aliran bebas pada penelitian ini diperoleh $u_e = \frac{3}{2} \sin x$, sehingga untuk $\frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{3}{2} \cos x$, dengan substitusi u_e dan $\frac{\partial u_e}{\partial x}$ pada Persamaan (4.85), (4.86), (4.87) dan (4.88) maka diperoleh

Untuk *small time*

Persamaan momentum untuk *small time*

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} t \cos x \\
& \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + \frac{3}{2} t \sin x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
& + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \lambda s t
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Persamaan energi untuk *small time*

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
& + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3 \cos x Pr t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} + Pr t \frac{3}{2} \sin x \\
& \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right)
\end{aligned} \tag{4.90}$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
t = 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0 \text{ untuk semua } x, \eta \\
t > 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, s = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Untuk *large time*

Persamaan momentum untuk *large time*

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \cos x \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + 2F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \\
& = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + \frac{3}{2} \sin x \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) - \frac{2}{3} \lambda S
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Persamaan energi untuk *large time*

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + 3 Pr \cos x F \frac{\partial S}{\partial Y} \\
& = Pr \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2} Pr \sin x \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right)
\end{aligned} \tag{4.92}$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ saat } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty$$

BAB 5

PENYELESAIAN SECARA NUMERIK MODEL MATEMATIKA

Bab ini menjelaskan mengenai penyelesaian numerik pada model fluida nano yang melewati bola pejal dengan adanya pengaruh *magnetohydrodynamic* yang terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi dalam kondisi *unsteady* dan *incompressible* menggunakan metode numerik *Euler Implicit Finite Difference*

5.1 Diskritisasi Model

Model matematika dari magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran diberikan sebagai berikut.

Untuk *small time*

Persamaan momentum untuk *small time*

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} t \cos x \\ & \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + \frac{3}{2} t \sin x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ & + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \lambda_{st} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Persamaan energi untuk *small time*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\ & + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3 \cos x Pr t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} + Pr t \frac{3}{2} \sin x \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$t = 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0$ untuk semua x, η

$t > 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1$ pada saat $\eta = 0$

$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, s = 0$ pada saat $\eta \rightarrow \infty$

Untuk *large time*

Persamaan momentum untuk *large time*

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \cos x \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + 2F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \\
& = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + \frac{3}{2} \sin x \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) - \frac{2}{3} \lambda S \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Persamaan energi untuk *large time*

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + 3 Pr \cos x F \frac{\partial S}{\partial Y} \\
& = Pr \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2} Pr \sin x \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \quad (5.4)
\end{aligned}$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ saat } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty$$

5.1.1 Diskritisasi Model Persamaan Momentum untuk *small time*

Dengan substitusi $\frac{\partial f}{\partial \eta} = u$, maka Persamaan (5.1) menjadi

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{3}{2} t \cos x \\
& \left(1 - (u)^2 + 2f \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} t \sin x \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\
& + Mt(1-u) - \frac{2}{3} \lambda st \quad (5.5)
\end{aligned}$$

pada pengamatan ini berada pada titik stagnasi maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{3}{2} t \\
& \left(1 - (u)^2 + 2f \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial u}{\partial t} + Mt(1-u) - \frac{2}{3} \lambda st
\end{aligned}$$

dengan menggunakan metode *Euler Implicit Finite Difference* maka

diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{\Delta\eta^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \\
& + \frac{\eta_i}{2} \left(\frac{3u_{i+1}^{n+1} - 4u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right) \\
& + \frac{3}{2} t^{n+1} \left(1 - (u_i^{n+1})^2 + 2f_i^n \frac{1}{2\Delta\eta} (3u_{i+1}^{n+1} - 4u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \right) \\
& = t^{n+1} \frac{1}{2\Delta t} (3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_i^{n-1}) + Mt^{n+1} (1 - u_i^{n+1}) - \frac{2}{3} \lambda s_i^n t^{n+1}
\end{aligned}$$

dengan substitusi $u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i^n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{t^{n+1}}{2\Delta t} (3\Delta u_i^n - \Delta u_i^{n-1}) - \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{\Delta\eta^2} \\
& (\Delta u_{i+1}^n - 2\Delta u_i^n + \Delta u_{i-1}^n) - \frac{\eta_i}{4} \frac{1}{\Delta\eta} (3\Delta u_{i+1}^n - 4\Delta u_i^n + \Delta u_{i-1}^n) \\
& + \frac{3}{2} t^{n+1} 2u_i^n \Delta u_i^n - \frac{3}{2} t^{n+1} \frac{f_i^n}{\Delta\eta} (3\Delta u_{i+1}^n - 4\Delta u_i^n + \Delta u_{i-1}^n) \\
& - t^{n+1} M \Delta u_i^n = Ki
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
Ki &= \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{\Delta\eta^2} \\
& (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{\eta_i}{4} \frac{1}{\Delta\eta} (3u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n) \\
& + \frac{3}{2} t^{n+1} \left(1 - (u_i^n)^2 + \frac{f_i^n}{\Delta\eta} (3u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n) \right) \\
& - t^{n+1} M (1 - u_i^n) + \frac{2}{3} \lambda s_i^n t^{n+1}
\end{aligned}$$

dan untuk

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{4} \frac{\eta_i}{\Delta\eta} + \frac{3}{2} t^{n+1} f_i^n \frac{1}{\Delta\eta} \\
A_1 &= \frac{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right]}{\Delta\eta^2} + A_0 \\
A_2 &= \frac{3}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} + 2 \frac{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right]}{\Delta\eta^2} - t^{n-1} M + 3t^{n+1} u_i^n + 4A_0 \\
A_3 &= \frac{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right]}{\Delta\eta^2} + 3A_0
\end{aligned}$$

Persamaan beda pada persamaan momentum untuk *small time* adalah

$$-(A_1)\Delta u_{i-1}^{n+1} + (A_2)\Delta u_i^{n+1} - (A_3)\Delta u_{i+1}^{n+1} = K_i$$

5.1.2 Diskritisasi Model Persamaan Energi untuk *small time*

$$\begin{aligned}
Pr \, t \frac{\partial s}{\partial t} &= \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
&+ Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3 \cos x Pr t f \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t \frac{3}{2} \sin x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

pada pengamatan ini berada pada titik stagnasi maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
Pr \, t \frac{\partial s}{\partial t} &= \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
&+ Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3 Pr t f \frac{\partial s}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

dengan menggunakan metode *Euler Implicit Finite Difference* maka diperoleh

$$\begin{aligned}
Pr \, t^{n+1} \frac{1}{2\Delta t} (3s_i^{n+1} - 4s_i^n + s_i^{n-1}) &= \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \\
&\frac{1}{\Delta\eta^2} (s_{i+1}^{n+1} - 2s_{i+1}^{n+1} + s_{i-1}^{n+1}) \\
&+ Pr \frac{\eta_i}{\Delta\eta} \frac{1}{2} (3s_{i+1}^{n+1} - 4s_i^{n+1} + s_{i-1}^{n+1}) \\
&+ 3 Pr t^{n+1} f_i^n \frac{1}{2\Delta\eta} (3s_{i+1}^{n+1} - 4s_i^{n+1} + s_{i-1}^{n+1})
\end{aligned}$$

dengan substitusi $s_i^{n+1} = s_i^n + \Delta s_i^n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& 3Pr \frac{t^{n+1}}{2\Delta t} \Delta s_i^n - Pr \frac{t^{n+1}}{2\Delta t} \Delta s_i^{n-1} - \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \\
& \frac{1}{\Delta \eta^2} (\Delta s_{i+1}^n - 2\Delta s_i^n + \Delta s_{i-1}^n) - \frac{1}{4} Pr \frac{\eta_i}{\Delta \eta} (3\Delta s_{i+1}^n - 4\Delta s_i^n + \Delta s_{i-1}^n) \\
& - \frac{3}{2} Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta \eta} f_i^n (3\Delta s_{i+1}^n - 4\Delta s_i^n + \Delta s_{i-1}^n) = Li
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
Li &= \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \\
& \frac{1}{\Delta \eta^2} (s_{i+1}^n - 2s_i^n + s_{i-1}^n) + \frac{1}{4} Pr \frac{\eta_i}{\Delta \eta} (3s_{i+1}^n - 4s_i^n + s_{i-1}^n) \\
& + 3Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta 2\eta} f_i^n (3s_{i+1}^n - 4s_i^n + s_{i-1}^n)
\end{aligned}$$

dan untuk

$$\begin{aligned}
B_0 &= \frac{1}{4} Pr \frac{\eta_i}{\Delta \eta} + \frac{3}{2} Pr t^{n+1} f_i^n \frac{1}{\Delta \eta} \\
B_1 &= \frac{\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right)}{\Delta \eta^2} + B_0 \\
B_2 &= 3Pr \frac{t^{n+1}}{2\Delta t} + 2 \frac{\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right)}{\Delta \eta^2} + 4B_0 \\
B_3 &= \frac{\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right)}{\Delta \eta^2} + 3B_0
\end{aligned}$$

Persamaan beda pada persamaan energi untuk *small time* adalah

$$-(B_1)\Delta s_{i-1}^{n+1} + (B_2)\Delta s_i^{n+1} - (B_3)\Delta s_{i+1}^{n+1} = L_i$$

5.1.3 Diskritisasi Model Persamaan Momentum untuk *large time*

Dengan substitusi $\frac{\partial F}{\partial Y} = U$, maka Persamaan 5.3 menjadi

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \cos x \left[1 - (U)^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial Y} \right] \\
& = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left(U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + M(1 - U) - \frac{2}{3} \lambda S
\end{aligned}$$

pada pengamatan ini berada pada titik stagnasi maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \left[1 - (U)^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial Y} \right] \\
& = \frac{\partial U}{\partial t} + M(1-U) - \frac{2}{3} \lambda S
\end{aligned}$$

dengan menggunakan metode *Euler Implicit Finite Difference* maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{\Delta Y^2} (U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) \\
& + \frac{3}{2} \left(1 - (U_i^{n+1})^2 + 2F_i^n \frac{1}{2\Delta Y} (3U_{i+1}^{n+1} - 4U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) \right) \\
& = \frac{1}{2\Delta t} (3U_i^{n+1} - 4U_i^n + U_i^{n-1}) + M(1 - U_i^{n+1}) - \frac{2}{3} \lambda S_i^n
\end{aligned}$$

dengan substitusi $U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta U_i^n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} (3\Delta U_i^n - \Delta U_i^{n-1}) - \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{\Delta Y^2} \\
& (\Delta U_{i+1}^n - 2\Delta U_i^n + \Delta U_{i-1}^n) + \frac{3}{2} 2U_i^n \Delta U_i^n \\
& - \frac{3}{2} \frac{F_i^n}{\Delta Y} (3\Delta U_{i+1}^n - 4\Delta U_i^n + \Delta U_{i-1}^n) \\
& - M\Delta U_i^n = Mi
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
Mi & = \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{\Delta Y^2} \\
& (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) + \frac{3}{2} \\
& \left(1 - (U_i^n)^2 + \frac{F_i^n}{\Delta Y} (3U_{i+1}^n - 4U_i^n + U_{i-1}^n) \right) \\
& - M(1 - U_i^n) + \frac{2}{3} \lambda S_i^n
\end{aligned}$$

dan untuk

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{3}{2} F_i^n \frac{1}{\Delta Y} \\
C_1 &= \frac{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right]}{\Delta Y^2} + C_0 \\
C_2 &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta t} + 2 \frac{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right]}{\Delta Y^2} - M + 3u_i^n + 4C_0 \\
C_3 &= \frac{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right]}{\Delta Y^2} + 3C_0
\end{aligned}$$

Persamaan beda pada persamaan momentum untuk *large time* adalah

$$-(C_1)\Delta U_{i-1}^{n+1} + (C_2)\Delta U_i^{n+1} - (C_3)\Delta U^{n+1} = M_i$$

5.1.4 Diskritisasi Model Persamaan Energi untuk *large time*

$$\begin{aligned}
Pr \frac{\partial S}{\partial t} &= \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \\
&+ 3 Pr \cos x F \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{3}{2} Pr \sin x \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right)
\end{aligned}$$

pada pengamatan ini berada pada titik stagnasi maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
Pr \frac{\partial S}{\partial t} &= \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \\
&+ 3 Pr F \frac{\partial S}{\partial Y}
\end{aligned}$$

dengan menggunakan metode *Euler Implicit Finite Difference* maka diperoleh

$$\begin{aligned}
Pr \frac{1}{2\Delta t} (3S_i^{n+1} - 4S_i^n + S_i^{n-1}) &= \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \\
&\frac{1}{\Delta Y^2} (S_{i+1}^{n+1} - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}) \\
&+ 3 Pr F_i^n \frac{1}{2\Delta Y} (3S_{i+1}^{n+1} - 4S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1})
\end{aligned}$$

dengan substitusi $S_i^{n+1} = S_i^n + \Delta S_i^n$ maka diperoleh

$$3Pr \frac{1}{2\Delta t} \Delta S_i^n - Pr \frac{1}{2\Delta t} \Delta S_{i-1}^n - \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \\ \frac{1}{\Delta Y^2} (\Delta S_{i+1}^n - 2\Delta S_i^n + \Delta S_{i-1}^n) - 3Pr \frac{1}{2\Delta Y} F_i^n (3\Delta S_{i+1}^n - 4\Delta S_i^n + \Delta S_{i-1}^n) = Ni$$

dengan

$$Ni = \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{1}{\Delta Y^2} (S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n) + \frac{3}{2} Pr \frac{1}{\Delta Y} F_i^n (3S_{i+1}^n - 4S_i^n + S_{i-1}^n)$$

dan untuk

$$\begin{aligned}
D_0 &= \frac{3}{2}Pr \frac{1}{\Delta Y} \\
D_1 &= \frac{\left(\frac{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s) \right) \left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right)}{\Delta Y^2} + D_0 \\
D_2 &= \frac{3}{2}Pr \frac{1}{\Delta t} + 2 \frac{\left(\frac{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s) \right) \left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right)}{\Delta Y^2} + 4D_0 \\
D_3 &= \frac{\left(\frac{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s) \right) \left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right)}{\Delta Y^2} + 3D_0
\end{aligned}$$

Persamaan beda pada persamaan energi untuk *large time* adalah

$$-(D_1)\Delta s_{i-1}^{n+1} + (D_2)\Delta s_i^{n+1} - (D_3)\Delta s_{i+1}^{n+1} = N_i$$

5.2 Algoritma Thomas

Persamaan beda untuk persamaan momentum diberikan sebagai berikut

$$-(A_1)\Delta u_{i-1}^{n+1} + (A_2)\Delta u_i^{n+1} - (A_3)\Delta u_{i+1}^{n+1} = K_i$$

memiliki partisi sebanyak $n\eta$ titik yang tidak diketahui dan untuk $\eta = 0$ merupakan titik yang nilai kecepatannya diketahui. Dari $n\eta$ titik yang tidak diketahui dapat dibentuk sistem persamaan linier. Misalkan jumlah titik tersebut adalah $m = n\eta$, maka dapat dituliskan

$$\begin{array}{rcl} (A_2)_1 \Delta u_1^{n+1} - (A_3)_1 \Delta u_2^{n+1} & & = K_1 \\ -(A_1)_2 \Delta u_1^{n+1} + (A_2)_2 \Delta u_2^{n+1} - (A_3)_2 \Delta u_3^{n+1} & & = K_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(A_1)_{m-1} \Delta u_{m-2}^{n+1} + (A_2)_{m-1} \Delta u_{m-1}^{n+1} - (A_3)_{m-1} \Delta u_m^{n+1} & & = K_{m-1} \\ & -(A_1)_m \Delta u_{m-1}^{n+1} + (A_2)_m \Delta u_m^{n+1} & = K_m \end{array}$$

Selanjutnya, melakukan eliminasi diagonal bawah pada sistem persamaan linier, dengan mengalikan $-(A_1)_2$ pada baris pertama, sehingga diperoleh

$$-(A_1)_2(A_2)_1\Delta u_1^{n+1} + (A_1)_2(A_3)_1\Delta u_2^{n+1} = -(A_1)_2K_1$$

dan mengalikan $(A_2)_1$ pada baris kedua, sehingga diperoleh

$$-(A_2)_1(A_1)_2\Delta u_1^{n+1} + (A_2)_1(A_2)_2\Delta u_2^{n+1} - (A_2)_1(A_3)_2\Delta u_3^{n+1} = (A_2)_1K_2$$

dengan mengurangi baris kedua dengan baris pertama, maka baris kedua ditulis sebagai berikut

$$((A_2)_1(A_2)_2 - (A_1)_2(A_3)_1)\Delta u_2^{n+1} - (A_2)_1(A_3)_2\Delta u_3^{n+1} = (A_2)_1K_2 + (A_1)_2K_1$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\left((A_2)_2 - \frac{(A_1)_2(A_3)_1}{(A_2)_1} \right) \Delta u_2^{n+1} - (A_3)_2\Delta u_3^{n+1} = K_2 + \frac{(A_1)_2}{(A_2)_1}K_1$$

Misalkan

$$K'_2 = K_2 + \frac{(A_1)_2}{(A_2)_1}K_1$$

dan

$$(A_2)'_2 = (A_2)_2 - \frac{(A_1)_2(A_3)_1}{(A_2)_1}$$

maka dapat diperoleh

$$(A_2)'_2\Delta u_2^{n+1} - (A_3)_2\Delta u_3^{n+1} = K'_2$$

Proses ini dilakukan sampai baris ke- m sehingga diagonal bawah tereliminasi. untuk baris ke- $m-1$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$(A_2)'_{m-1}\Delta u_{m-1}^{n+1} - (A_3)_{m-1}\Delta u_m^{n+1} = K'_{m-1}$$

Dengan mengalikan $-(A_1)_m$ untuk baris ke- $m-1$, diperoleh

$$-(A_1)_m(A_2)'_{m-1}\Delta u_{m-1}^{n+1} + (A_1)_m(A_3)_{m-1}\Delta u_m^{n+1} = -(A_1)_mK'_{m-1}$$

dan dengan mengalikan $(A_2)'_{m-1}$ pada baris terakhir, maka diperoleh

$$-(A_2)'_{m-1}(A_1)_m\Delta u_{m-1}^{n+1} + (A_2)'_{m-1}(A_3)_{m-1}\Delta u_m^{n+1} = (A_2)'_{m-1}K_m$$

dengan mengurangi baris ke- m dengan baris ke- $m-1$, maka diperoleh

$$\left((A_2)'_{m-1}(A_3)_{m-1} - (A_1)_m(A_2)_m \right) \Delta u_m^{n+1} = (A_2)'_{m-1}K_m + (A_1)_mK'_{m-1}$$

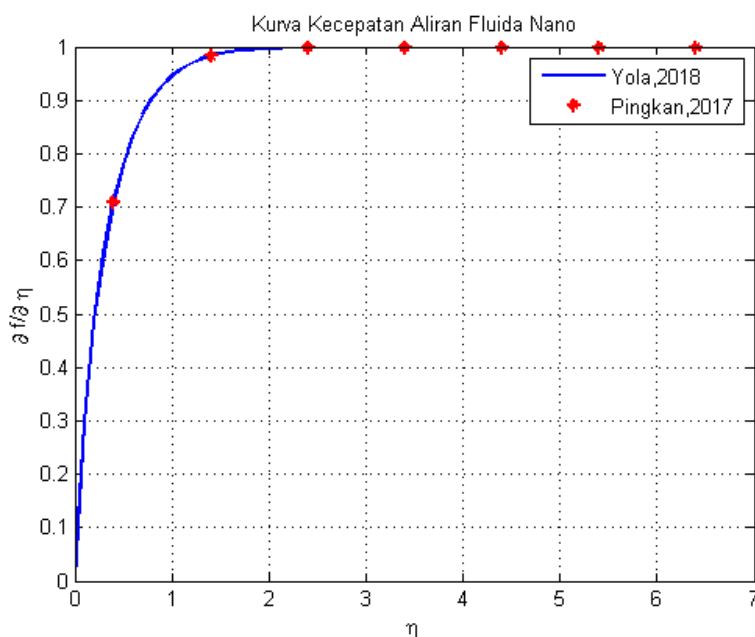
$$\Delta u_m^{n+1} = \frac{(A_2)'_{m-1}K_m + (A_1)_mK'_{m-1}}{((A_2)'_{m-1}(A_3)_{m-1} - (A_1)_m(A_2)_m)}$$

dengan melakukan substitusi nilai Δu_m^{n+1} ke dalam persamaan pada baris $m-1$, maka solusi untuk Δu_{m-1}^{n+1} diperoleh. Hal ini dilakukan sampai pada baris pertama sehingga diperoleh solusi Δu_1^{n+1} . Akibatnya, kita dapatkan solusi untuk Δu_i^{n+1} .

5.3 Validasi Data Penelitian dengan Data Penelitian Sebelumnya

Validasi adalah perbandingan hasil perhitungan numerik yang diperoleh dengan hasil peneliti sebelumnya yang telah mendapat pengakuan secara akademik, misalnya telah dipublikasikan dalam jurnal atau telah diseminarkan pada *international conference*. Pada sub bab ini dibahas mengenai model matematika yang telah diperoleh pada Bab 4 akan dibandingkan dengan model yang dihasilkan dari penelitian Pingkan Aevu Mariosty Palyama (2017) dengan judul "MHD yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas yang Mengalir Melalui Bola di Dalam Fluida Nano di Bawah Pengaruh Medan Magnet". Pada penelitian (Palyama, 2017) medan magnet berasal dari fluida dan tidak ada pengaruh dari konveksi campuran. Sedangkan penelitian ini, medan magnet berasal dari bola dan adanya pengaruh konveksi campuran. Perbandingan yang dilakukan pada profil kecepatan dan temperatur. Parameter yang digunakan adalah parameter magnetik, parameter konveksi campuran, bilangan Prandtl dan *volume fraction*. Inputan yang digunakan dengan memberikan nilai parameter $M = 0$, $\lambda = 0$, $Pr = 1$, dan $\chi = 0.1$, Kurva profil kecepatan dan temperatur ditunjukkan pada Gambar 5.1 dan Gambar 5.2.

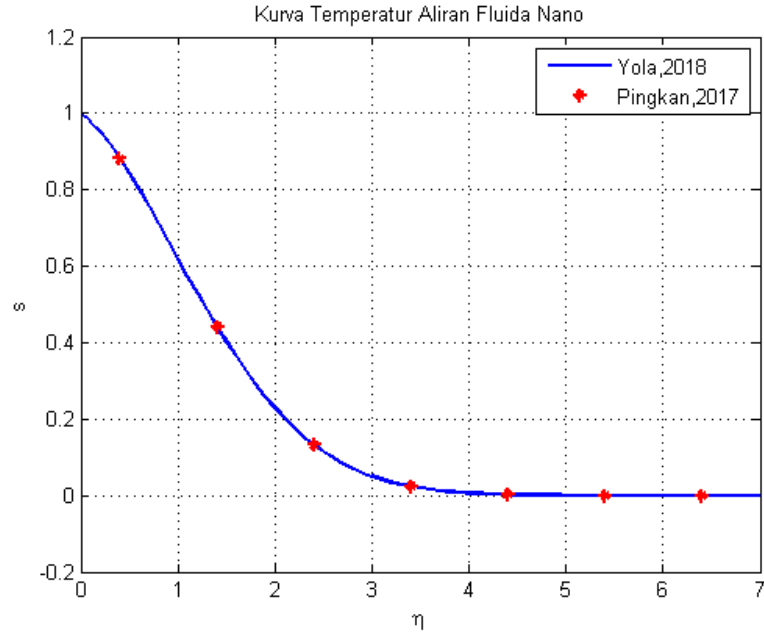
Pada Gambar 5.1 kurva kecepatan pada penelitian (Palyama, 2017) dan



Gambar 5.1: Kurva Kecepatan Aliran Fluida

(Yola, 2018) mempunyai nilai kecepatan yang saling berhimpitan. Pada Gambar 5.2 kurva temperatur pada penelitian (Yola, 2018) mempunyai nilai temperatur yang tidak berbeda jauh dengan penelitian (Palyama, 2017).

Berdasarkan Gambar 5.1 dan Gambar 5.2 diperoleh hasil numerik pada Tabel 5.1. Berdasarkan Tabel 5.1 menunjukkan bahwa hasil penelitian "confirm" dengan hasil penelitian dari hasil peneliti sebelumnya dengan akurasi 10^{-6} .



Gambar 5.2: Kurva Temperatur Aliran Fluida

Oleh karena itu, simulasi numerik menggunakan metode *implicit Euler*

Tabel 5.1: Validasi Hasil Simulasi

η	Kecepatan (Pingkan, 2017)	Kecepatan (Yola, 2018)	Temperatur (Pingkan, 2017)	Temperatur (Yola, 2018)
0.4	0.70920	0.70920	0.88158	0.88158
1.4	0.98284	0.98284	0.44178	0.44178
2.4	0.99925	0.99925	0.13245	0.13245
3.4	0.99996	0.99996	0.02373	0.02373
4.4	0.99994	0.99994	0.00258	0.00258
5.4	0.99985	0.99985	0.00016	0.00016
6.4	0.99962	0.99962	0	0

dari aliran fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dipengaruhi oleh konveksi campuran dilanjutkan dengan bervariasi beberapa parameter, yaitu parameter magnetik (M), parameter konveksi campuran (λ), bilangan Prandtl (Pr), dan *volume fraction* (χ). Semua variasi ini dituangkan dalam sub bab berikut ini.

5.4 Simulasi dan Analisis Hasil

Pada sub bab ini akan dibahas tentang simulasi dari model yang telah dikerjakan menggunakan software MATLAB. Simulasi dilakukan dengan $\Delta\eta = 0.1$, partisi η sebanyak 70 dan bervariasi parameter-parameter non-dimensional yaitu parameter magnetik, konveksi campuran, bilangan Prandtl,

dan *volume fraction*. Pada penelitian ini, partikel nano yang digunakan adalah Cu dan Al_2O_3 . Setiap partikel nano mempunyai nilai kapasitas panas c_p , densitas ρ dan konduktivitas termal k seperti pada Tabel 5.2.

Tabel 5.2: *Thermo-physical properties nano particle*

<i>Properties</i>	Fluida Dasar (Air)	Partikel Cu	Partikel Al_2O_3
$\rho(\frac{kg}{m^3})$	997.1	8933	3970
$c_p(\frac{J}{kg\ K})$	4179	385	765
$k(\frac{W}{mK})$	0.613	400	40

Data pada Tabel 5.2 digunakan sebagai inputan dalam analisis pengaruh variasi parameter magnetik, parameter konveksi campuran, bilangan Prandtl, dan *volume fraction*. Berikut adalah uraian hasil analisis simulasi dari masing-masing variasi parameter.

5.4.1 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik (M) pada Partikel Nano Cu

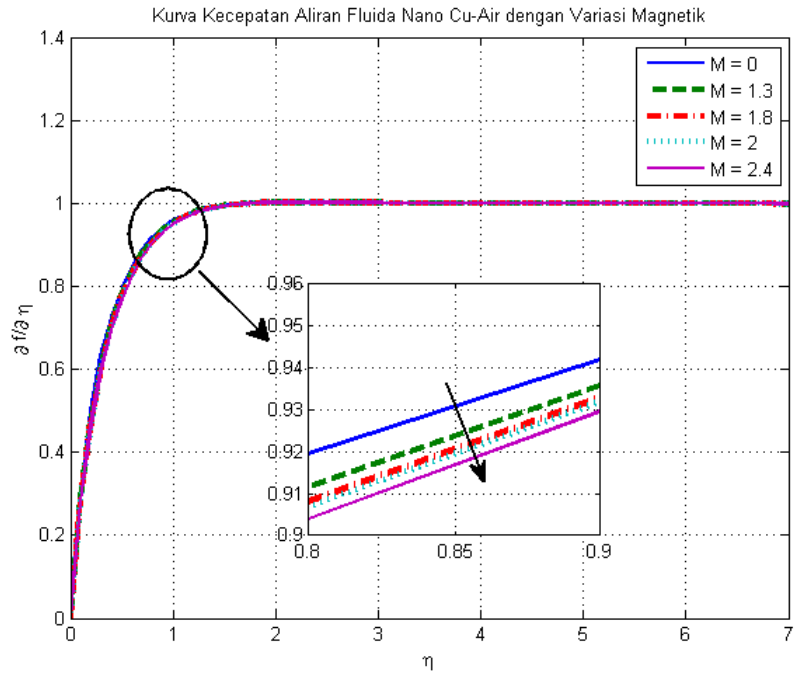
Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter magnetik terhadap profil kecepatan dan temperatur fluida dengan partikel nano Cu . Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter konveksi campuran, bilangan Prandtl, dan *volume fraction* yaitu masing-masing sebesar $\lambda = 1$, $Pr = 1$, dan $\chi = 0.1$. Sedangkan nilai parameter magnetik diperoleh secara matematis sebagai berikut $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty}$. Pada penelitian ini, digunakan variasi magnetik dengan $B_0 = 10^{-1}$, $a = 10^{-1}$, $U_\infty = 1$. Nilai parameter magnetik ditunjukkan pada Tabel 5.3. Hasil simulasi

Tabel 5.3: *Parameter Magnetik*

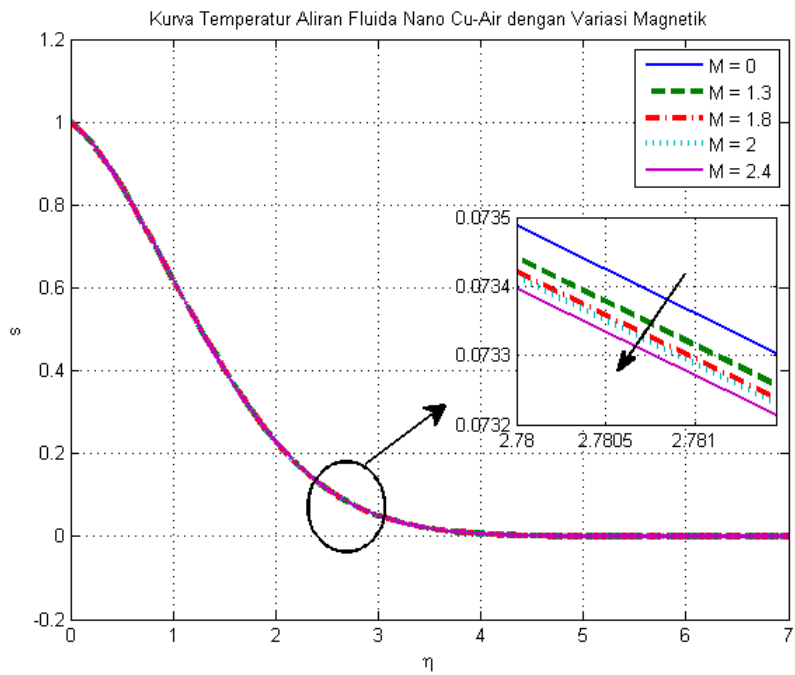
Benda Bermagnet	$\rho(kg/m^3)$	σ	M
Seng	7.14×10^3	1.68×10^7	2.4
Besi	7.84×10^3	1.04×10^7	1.3
Baja	7.75×10^3	1.61×10^7	2
Kobalt	8.86×10^3	1.6×10^7	1.8

yang menunjukkan adanya pengaruh dari parameter magnetik ditunjukkan pada Gambar 5.3 dan Gambar 5.4.

Pada Gambar 5.3 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi parameter magnetik, profil kecepatan fluida nano menjadi lebih kecil ketika parameter magnetik ditingkatkan. Hal ini disebabkan karena adanya gaya Lorentz pada bola bermagnet sehingga fluida yang melalui bola bermagnet tersebut



Gambar 5.3: Kurva Kecepatan Variasi Magnetik



Gambar 5.4: Kurva Temperatur Variansi Magnetik

menerima gaya Lorentz. Secara matematis, gaya Lorentz dituliskan sebagai $\mathbf{F}=\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ atau $\mathbf{F}=\sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B})$, dengan $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0$ sehingga $\mathbf{F} \sim B_0$.

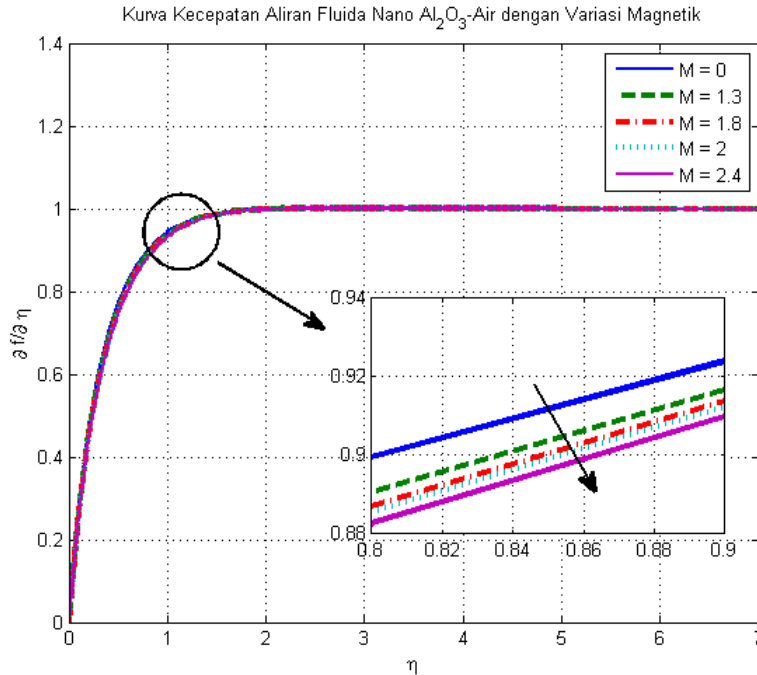
Parameter magnetik juga sebanding dengan B_0 atau $M \sim B_0$ sehingga dengan meningkatnya parameter magnetik, nilai B_0 semakin meningkat. Akibatnya gaya Lorentz pada sekitar bola bermagnet juga meningkat sehingga berpengaruh pada kecepatan fluida menjadi lebih kecil ketika parameter magnetik ditingkatkan.

Pada Gambar 5.4 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi parameter magnetik, maka temperatur fluida menjadi lebih kecil seiring dengan bertambahnya parameter magnetik. Medan magnet yang dihasilkan oleh bola bermagnet akan membuat energi internal yang digunakan fluida untuk mengalir semakin menurun, sehingga menyebabkan temperatur fluida menjadi lebih kecil.

5.4.2 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik (M) pada Partikel Nano Al_2O_3

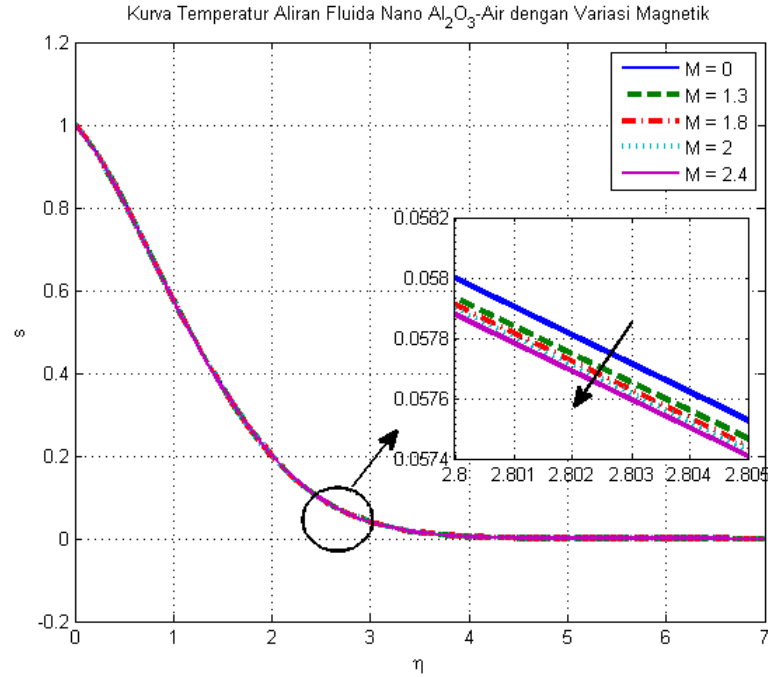
Pada simulasi ini digunakan partikel nano Al_2O_3 dengan variasi parameter magnetik. Nilai parameter konveksi campuran, bilangan Prandtl dan *volume fraction* yang sama dengan sub bab (5.4.1).

Pada Gambar 5.5 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan



Gambar 5.5: Kurva Kecepatan Variasi Magnetik

mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi parameter magnetik, profil kecepatan fluida nano dengan partikel Al_2O_3 menjadi lebih kecil ketika parameter magnetik ditingkatkan.



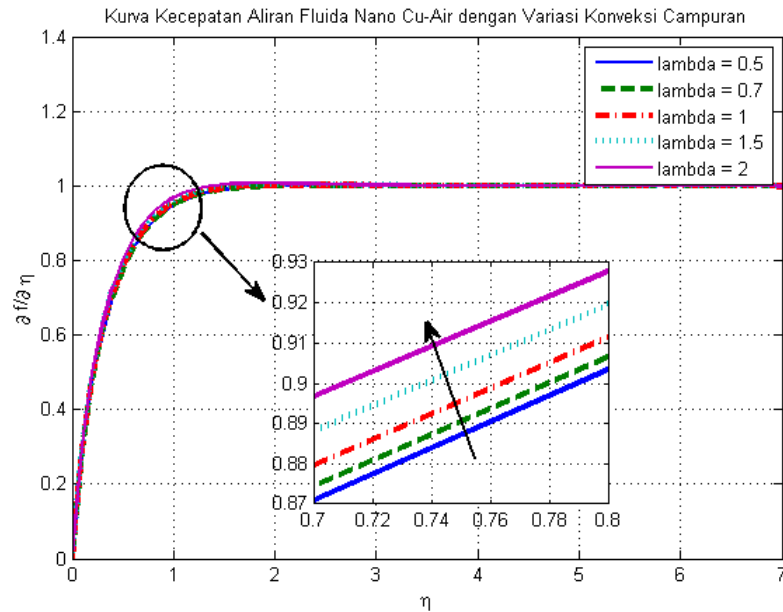
Gambar 5.6: Kurva Temperatur Variansi Magnetik

Pada Gambar 5.6 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi parameter magnetik, maka temperatur fluida dengan partikel nano Al_2O_3 menjadi lebih kecil seiring dengan bertambahnya parameter magnetik. Hal ini menunjukkan bahwa pengaruh variasi magnetik dengan partikel nano Al_2O_3 diperoleh hasil yang sama seperti partikel nano Cu .

5.4.3 Pengaruh Variasi Parameter Konveksi Campuran (λ) pada Partikel Nano Cu

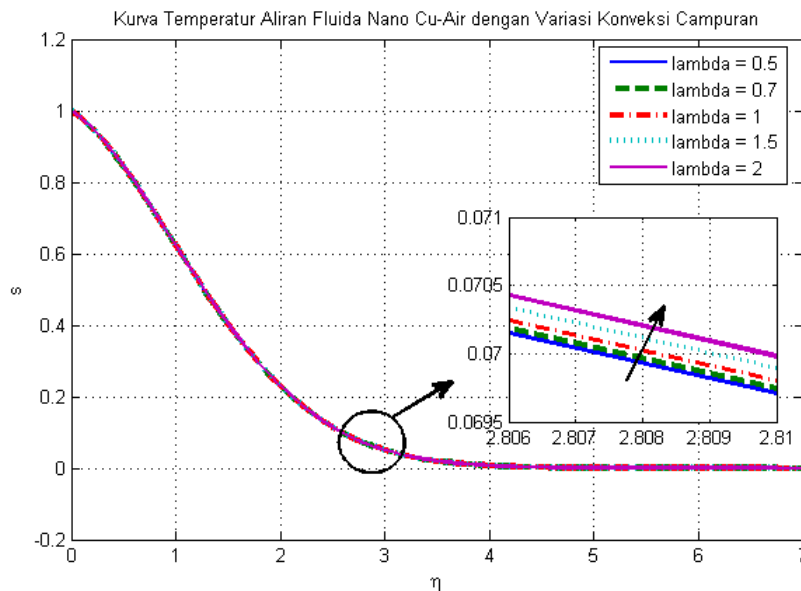
Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter konveksi campuran terhadap profil kecepatan dan temperatur fluida dengan partikel nano Cu . Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter magnetik, bilangan Prandtl, dan *volume fraction* yaitu masing-masing sebesar $M = 1.3$, $Pr = 1$, dan $\chi = 0.1$. Parameter konveksi campuran diperoleh dari perbandingan antara bilangan Grashof dengan kuadrat bilangan Reynold. Jika bilangan Grashof bernilai nol maka aliran fluida hanya dipengaruhi oleh konveksi paksa. Parameter konveksi campuran pada rentang $0 < \lambda < 1$ menunjukkan bahwa kuadrat bilangan Reynold lebih mendominasi daripada bilangan Grashof. Pada saat $\lambda \geq 1$ menunjukkan bahwa bilangan Grashof lebih dari atau sama dengan kuadrat bilangan Reynold. Parameter konveksi campuran divariasi yaitu $\lambda = 0.5, 0.7, 1, 1.5$, dan 2 .

Pada Gambar 5.7 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi parameter



Gambar 5.7: Kurva Kecepatan Variasi Konveksi Campuran

konveksi campuran, profil kecepatan fluida nano menjadi lebih besar ketika parameter konveksi campuran ditingkatkan. Hal ini terjadi karena bilangan Reynold sebanding dengan kerapatan fluida sehingga nilai parameter konveksi campuran berbanding terbalik dengan kerapatan fluida. Semakin besar



Gambar 5.8: Kurva Temperatur Variasi Konveksi Campuran

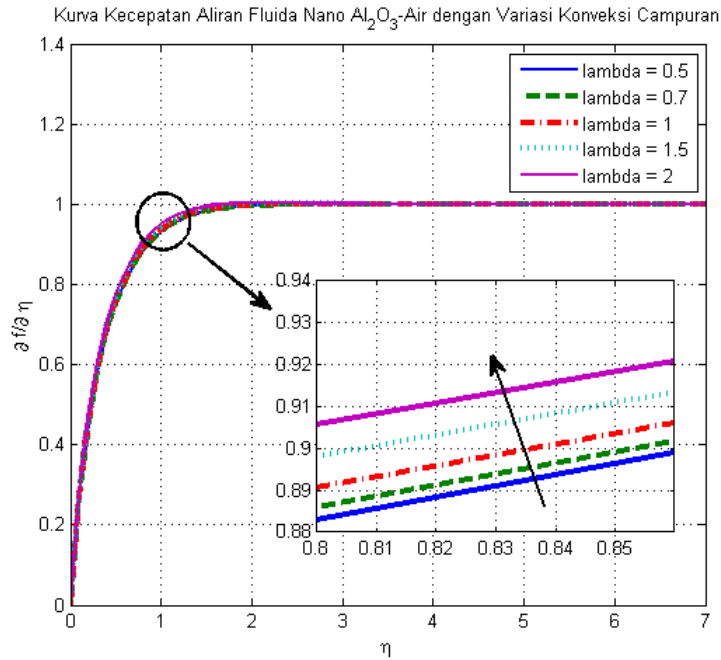
parameter konveksi campuran yang diberikan maka kerapatan fluida semakin berkurang. Semakin menurunnya kerapatan fluida mengakibatkan kecepatan

fluida menjadi lebih besar.

Sedangkan pada Gambar 5.8 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi parameter konveksi campuran, maka profil temperatur fluida nano menjadi lebih besar seiring dengan bertambahnya parameter konveksi campuran. Hal ini disebabkan karena parameter konveksi campuran sebanding dengan temperatur fluida sehingga semakin meningkat parameter konveksi campuran mengakibatkan temperatur aliran fluida menjadi lebih besar.

5.4.4 Pengaruh Variasi Parameter Konveksi Campuran (λ) pada Partikel Nano Al_2O_3

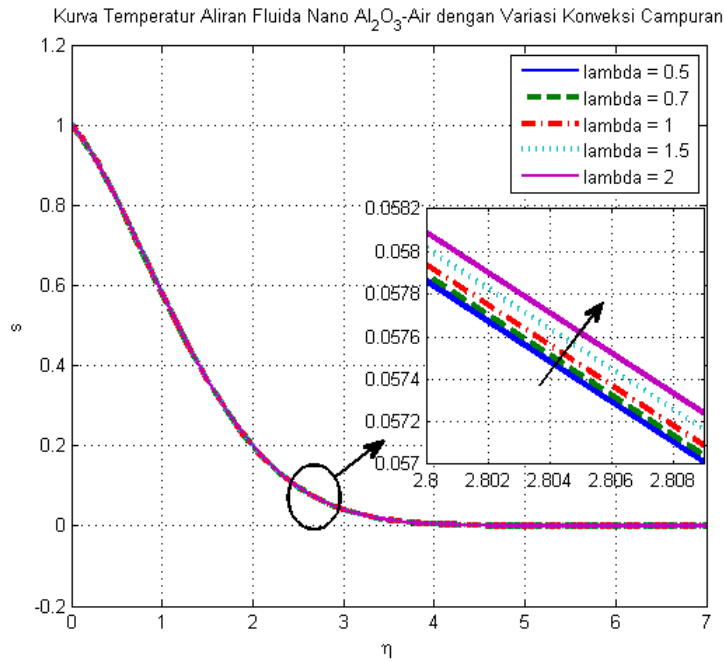
Pada simulasi ini digunakan partikel nano Al_2O_3 dengan variasi parameter konveksi campuran. Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter magnetik, bilangan Prandtl, dan *volume fraction* yang tetap sama dengan sub bab (5.4.3).



Gambar 5.9: Kurva Kecepatan Variasi Konveksi Campuran

Pada Gambar 5.9 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi parameter konveksi campuran, profil kecepatan fluida dengan partikel nano Al_2O_3 menjadi lebih besar ketika parameter konveksi campuran ditingkatkan.

Sedangkan pada Gambar 5.10 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi parameter konveksi campuran, maka profil temperatur fluida dengan partikel nano Al_2O_3 menjadi lebih besar seiring dengan bertambahnya parameter konveksi campuran. Hal ini menunjukkan bahwa pengaruh variasi



Gambar 5.10: Kurva Temperatur Variasi Konveksi Campuran

konveksi campuran dengan partikel nano Al_2O_3 diperoleh hasil yang sama seperti partikel nano Cu .

5.4.5 Pengaruh Variasi Prandtl (Pr) pada Partikel Nano Cu

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluida dengan partikel nano Cu .

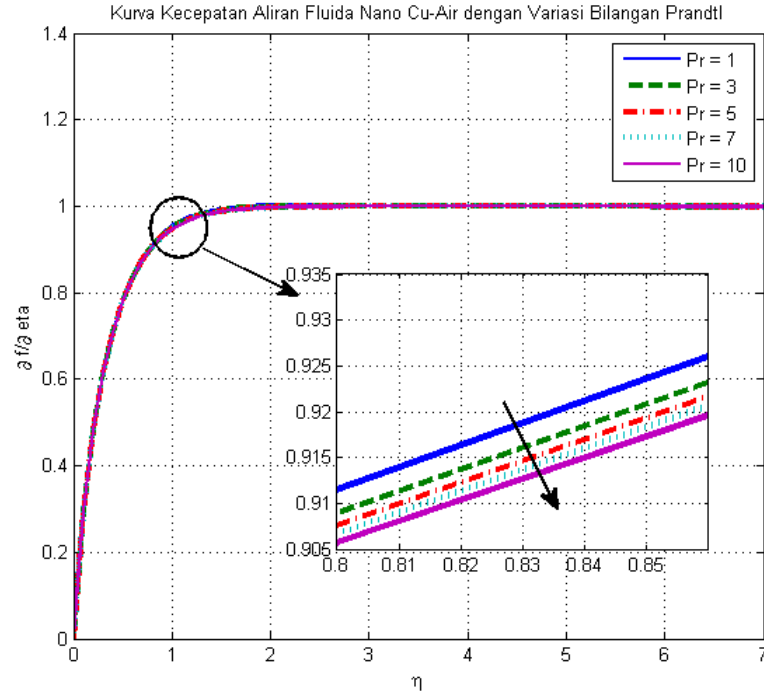
Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai

Tabel 5.4: Rentang Bilangan Prandtl

Fluida	Pr
Gas	0.7-1.0
Air	1.0-10.0
Cairan organik ringan	5-50
Minyak	50-100

parameter magnetik, parameter konveksi campuran, dan *volume fraction* yaitu masing-masing sebesar $M = 1.3$, $\lambda = 1$ dan $\chi = 0.1$. Sedangkan parameter bilangan Prandtl ditunjukkan pada Tabel 5.3 (Waltar *dkk*, 2012). Pada penelitian ini digunakan fluida nano, dengan kata lain fluida tersebut mengandung fluida dasar air dan partikel nano. Oleh karena itu, parameter bilangan Prandtl divariasi yaitu $Pr = 1, 3, 5, 7$, dan 10.

Pada Gambar 5.11 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl,



Gambar 5.11: Kurva Kecepatan Variasi Bilangan Prandtl

profil kecepatan menjadi lebih kecil ketika bilangan Prandtl diperbesar. Hal ini disebabkan oleh hubungan bilangan Prandtl dengan viskositas kinematik dan difusivitas termal. Bilangan Prandtl berbanding lurus dengan besar viskositas kinematik dan berbanding terbalik dengan difusivitas termal. Semakin besarnya bilangan Prandtl mengakibatkan semakin besar viskositas kinematik pada fluida tersebut sehingga kekentalan (*densitas*) fluida semakin meningkat. Akibat dari meningkatnya kekentalan (*densitas*) fluida maka menyebabkan kecepatan aliran fluida semakin menurun.

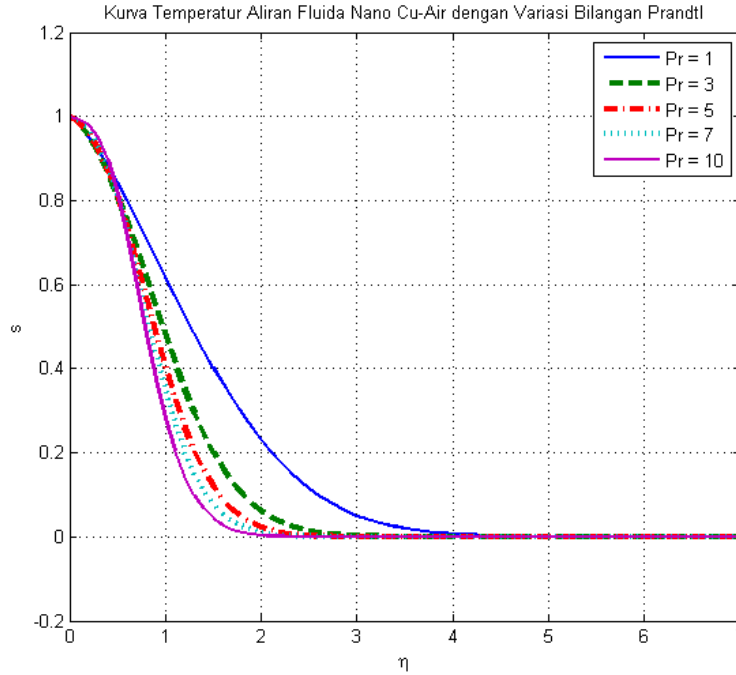
Pada Gambar 5.12 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl, profil temperatur menjadi lebih kecil ketika bilangan Prandtl diperbesar. Secara matematis, dapat dituliskan

$$\begin{aligned} Pr &= \frac{v}{\alpha} \\ &= \frac{v}{\frac{k}{\rho c_p}} \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$Pr = \frac{v \rho c_p}{k}$$

yang artinya bilangan Prandtl adalah perbandingan dari viskositas kinematik dengan difusivitas termal. Difusivitas termal berhubungan



Gambar 5.12: Kurva Temperatur Variasi Bilangan Prandtl

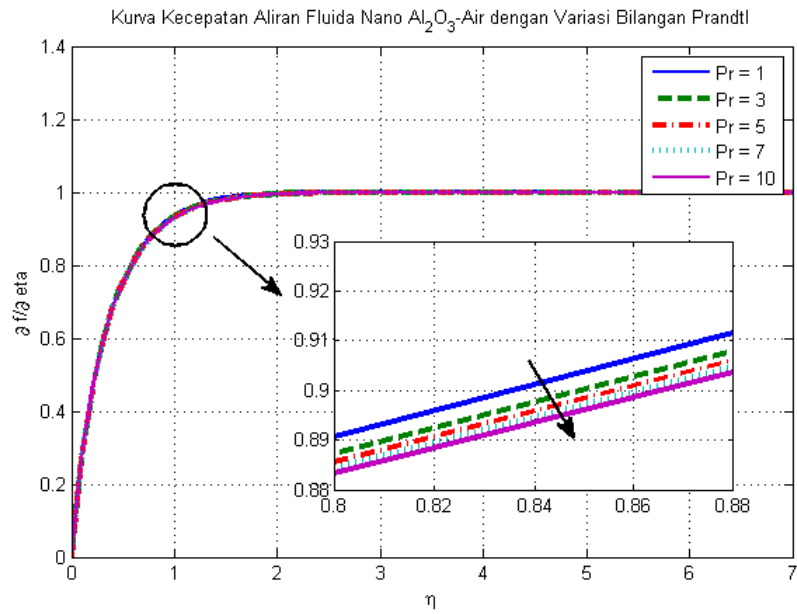
dengan perbandingan antara konduktivitas panas fluida dengan kapasitas penyimpanan energi sehingga bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan difusivitas termal. Hal ini mengakibatkan semakin besar bilangan Prandtl maka semakin rendah nilai difusivitas termal dari fluida tersebut sehingga mengakibatkan profil temperatur menjadi lebih kecil.

5.4.6 Pengaruh Variasi Prandtl (Pr) pada Partikel Nano Al_2O_3

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluida dengan partikel nano Al_2O_3 . Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter magnetik, parameter konveksi campuran, dan *volume fraction* yang tetap sama dengan sub bab (5.4.5). Hasil simulasi yang menunjukkan adanya pengaruh bilangan Prandtl dengan partikel nano Al_2O_3 pada profil kecepatan dan temperatur ditunjukkan pada Gambar 5.13 dan Gambar 5.14.

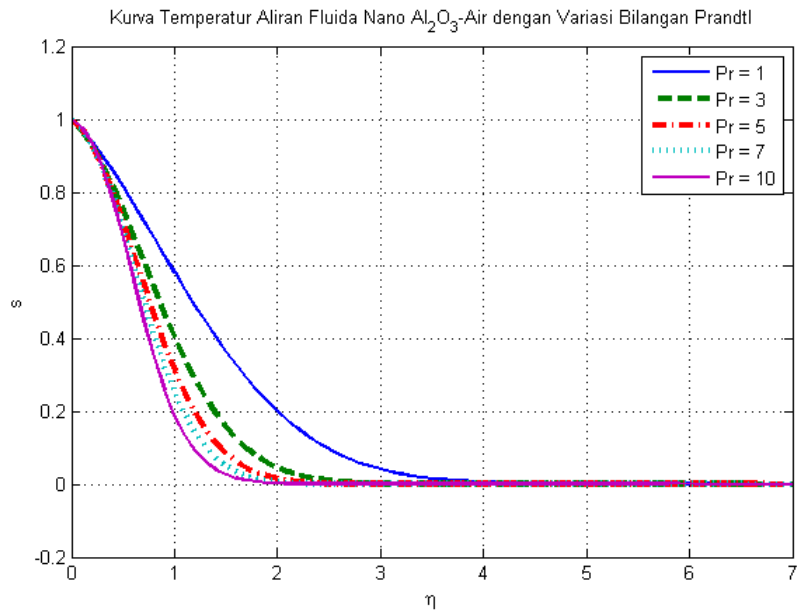
Pada Gambar 5.13 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl, profil kecepatan dengan partikel nano Al_2O_3 menjadi lebih kecil ketika bilangan Prandtl diperbesar. Semakin besarnya bilangan Prandtl mengakibatkan viskositas kinematik pada fluida menjadi semakin besar sehingga kekentalan (*densitas*) fluida semakin meningkat. Akibat dari meningkatnya kekentalan (*densitas*) fluida maka menyebabkan kecepatan aliran fluida semakin menurun.

Pada Gambar 5.14 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl, profil temperatur dengan partikel nano Al_2O_3 menjadi



Gambar 5.13: Kurva Kecepatan Variasi Bilangan Prandtl

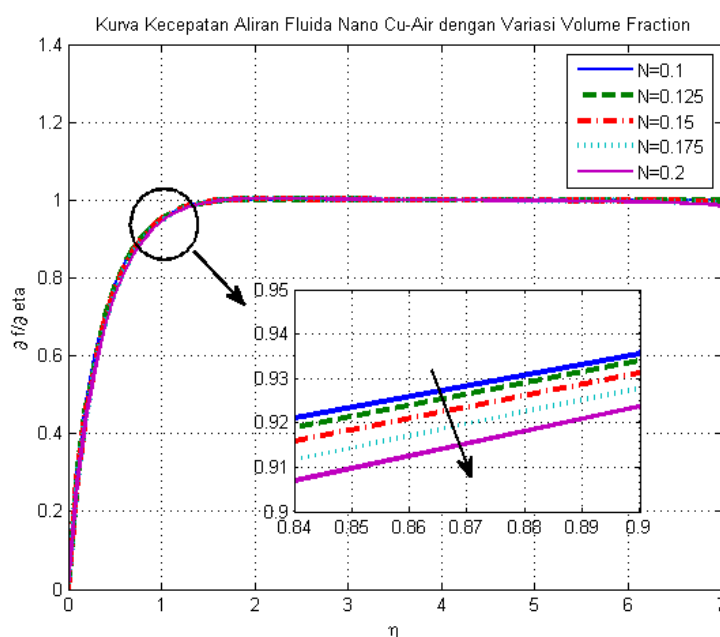
lebih kecil ketika bilangan Prandtl diperbesar. Hal ini menunjukkan bahwa pengaruh variasi bilangan Prandtl dengan partikel nano Al_2O_3 diperoleh hasil yang sama seperti partikel nano Cu .



Gambar 5.14: Kurva Temperatur Variasi Bilangan Prandtl

5.4.7 Pengaruh Variasi *volume fraction* (χ) pada Partikel Nano *Cu*

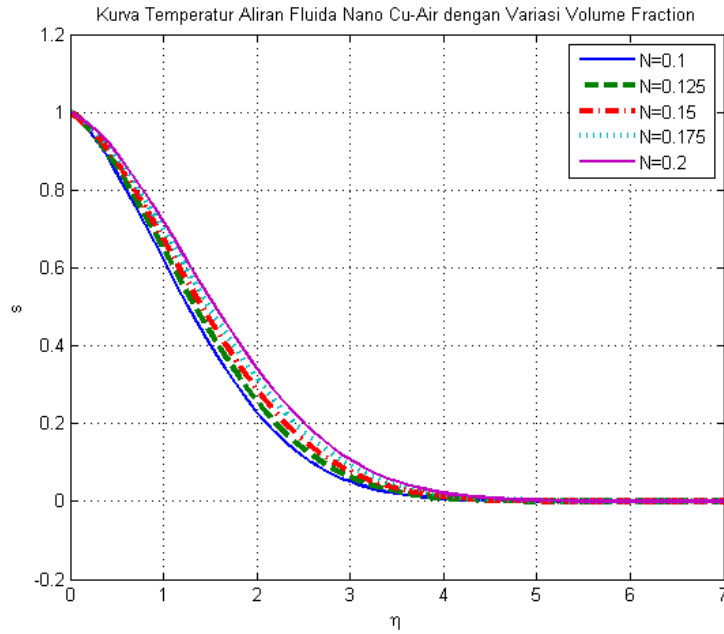
Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh *volume fraction* terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluida dengan partikel nano *Cu*. Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter magnetik, parameter konveksi campuran, dan bilangan Prandtl yaitu masing-masing sebesar $M = 1.3$, $\lambda = 1$ dan $Pr = 1$. Sedangkan parameter *volume fraction* divariasi yaitu $\chi = 0.1, 0.125, 0.15, 0.175$, dan 0.2 . Parameter *volume fraction* adalah $0.1 \leq \chi \leq 0.2$ dengan fluida dasar adalah air (Kandasamy dkk, 2017). Hasil simulasi yang menunjukkan adanya pengaruh *volume fraction* ditunjukkan pada Gambar 5.15 dan Gambar 5.16. Pada Gambar 5.15 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan



Gambar 5.15: Kurva Kecepatan Variasi *Volume Fraction*

mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi *volume fraction*, profil kecepatan menjadi lebih kecil ketika *volume fraction* semakin meningkat. Hal ini disebabkan karena dengan semakin bertambahnya *volume fraction* berarti semakin banyak pula partikel yang ada pada fluida. Hal tersebut mengakibatkan semakin besar gesekan yang dihasilkan antar partikel yang ada pada fluida. Gesekan yang semakin besar itulah yang menyebabkan profil kecepatan fluida menjadi lebih kecil.

Pada Gambar 5.16 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi *volume fraction*, profil temperatur menjadi lebih besar ketika *volume fraction* ditingkatkan. Profil temperatur yang dihasilkan menjadi lebih besar karena gesekan yang dihasilkan dari partikel yang ada pada fluida menyebabkan temperatur dari fluida juga akan meningkat sehingga profil temperatur yang



Gambar 5.16: Kurva Temperatur Variasi *Volume Fraction*

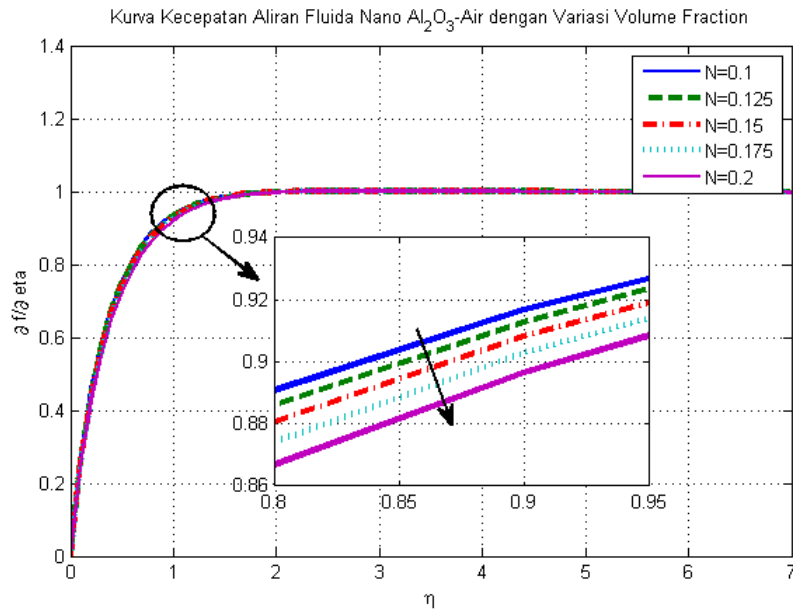
dihasilkan juga menjadi lebih besar.

5.4.8 Pengaruh Variasi *volume fraction* (χ) pada Partikel Nano Al_2O_3

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter *volume fraction* terhadap profil kecepatan dan temperatur fluida dengan partikel nano Al_2O_3 . Inputan yang digunakan dalam simulasi adalah dengan memberikan nilai parameter magnetik, parameter konveksi campuran, dan bilangan Prandtl yang tetap sama dengan sub bab (5.4.7) yaitu masing-masing sebesar $M = 1.3$, $\lambda = 1$ dan $Pr = 1$. Sedangkan parameter *volume fraction* divariasi yaitu $\chi = 0.1, 0.125, 0.15, 0.175$, dan 0.2 . Hasil simulasi yang menunjukkan adanya pengaruh *volume fraction* ditunjukkan pada Gambar 5.17 dan Gambar 5.18.

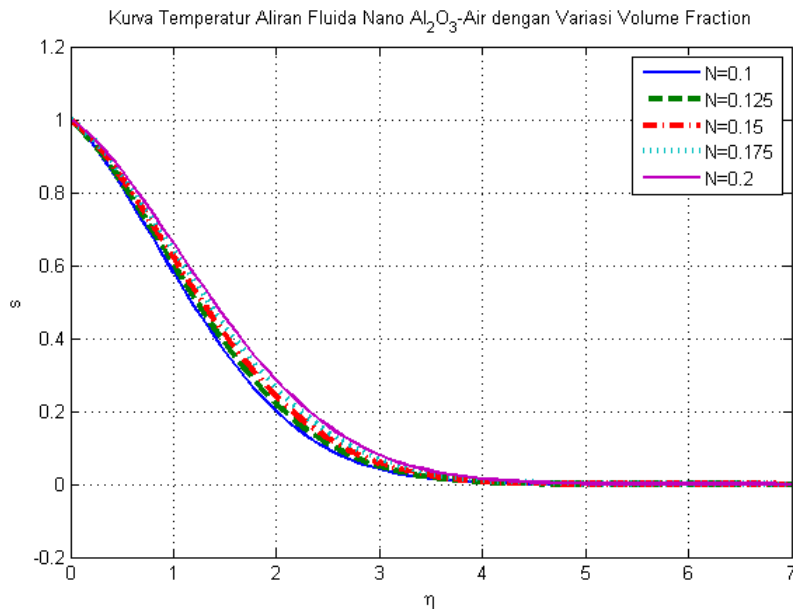
Pada Gambar 5.17 menunjukkan bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi *volume fraction*, profil kecepatan partikel nano Al_2O_3 menjadi lebih kecil ketika *volume fraction* semakin meningkat. Hal ini disebabkan karena dengan semakin bertambahnya *volume fraction* berarti semakin banyak pula partikel nano yang ada pada fluida. Hal tersebut mengakibatkan semakin besar gesekan yang dihasilkan antar partikel yang ada pada fluida. Pengaruh variasi *volume fraction* pada partikel nano Al_2O_3 diperoleh hasil yang sama seperti pada partikel nano Cu terhadap profil kecepatan.

Pada Gambar 5.18 menunjukkan terjadi penurunan pada profil temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi



Gambar 5.17: Kurva Kecepatan Variasi *Volume Fraction*

volume fraction, profil temperatur partikel nano Al_2O_3 menjadi lebih besar ketika *volume fraction* ditingkatkan. Hal ini menunjukkan bahwa pengaruh variasi *volume fraction* dengan partikel nano Al_2O_3 diperoleh hasil yang sama seperti partikel nano Cu .



Gambar 5.18: Kurva Temperatur Variasi *Volume Fraction*

BAB 6

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan, maka diperoleh kesimpulan bahwa model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola bermagnet di dalam fluida nano di bawah pengaruh konveksi campuran dapat diselesaikan menggunakan metode numerik yaitu Metode *Euler Implicit Finite Difference*. Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik (M), parameter konveksi campuran (λ), bilangan Prandtl (Pr), *volume fraction* (χ) terhadap kurva kecepatan dan temperatur, dapat disimpulkan sebagai berikut:

- 1 Model matematika MHD pada fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet dibangun oleh tiga persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Persamaan kontinuitas diperoleh dari penerapan hukum konservasi massa yang menyatakan bahwa jumlah massa dalam suatu *volume control* merupakan selisih dari massa yang masuk dan keluar dari permukaan kontrol. Persamaan momentum diperoleh dari penerapan hukum II Newton yang menyatakan bahwa besar momentum terhadap perubahan waktu sama dengan besarnya keseluruhan gaya-gaya yang bekerja pada sistem tersebut. Sedangkan untuk persamaan energi diperoleh dari penerapan hukum I Termodinamika yang menyatakan bahwa jumlah perubahan kalor pada suatu sistem adalah sama dengan perubahan energi didalam sistem tersebut ditambah dengan usaha yang dilakukan oleh sistem. Kemudian persamaan pembangun diubah ke bentuk model persamaan tak berdimensi, dan dilakukan transformasi kebentuk persamaan similaritas untuk mendapatkan model akhir dari pengaruh MHD pada fluida nano yang melewati bola bermagnet.
- 2 Model matematika MHD pada fluida nano tak tunak yang mengalir melewati bola bermagnet diselesaikan dengan metode *Implicit Euler*. Persamaan similaritas yang diperoleh didiskritisikan dengan menggunakan metode beda hingga pusat. Kemudian persamaan tersebut diselesaikan dengan menggunakan Algoritma Thomas.
- 3 Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik, konveksi campuran, bilangan Prandtl, dan *volume fraction* pada partikel nano Cu dan Al_2O_3 didapatkan bahwa:
 - i Ketika parameter magnetik (M) menjadi lebih besar diperoleh bahwa kecepatan dan temperatur fluida menjadi lebih kecil.

Kecepatan fluida menjadi lebih kecil pada $0 < \eta < 4$ dan temperatur menjadi lebih kecil pada $0 < \eta < 5$.

- ii Ketika parameter konveksi campuran (λ) menjadi lebih besar diperoleh bahwa kecepatan dan temperatur fluida menjadi lebih besar. Kecepatan fluida menjadi lebih besar pada $0 < \eta < 3.5$ dan temperatur menjadi lebih besar pada $0 < \eta < 5$.
- iii Ketika bilangan Prandtl (Pr) menjadi lebih besar diperoleh bahwa kecepatan dan temperatur fluida menjadi lebih kecil. Kecepatan fluida menjadi lebih kecil pada $0 < \eta < 2.5$ dan temperatur menjadi lebih kecil pada $0 < \eta < 4.8$.
- iv Ketika parameter *volume fraction* (χ) menjadi lebih besar profil temperatur fluida nano menjadi lebih besar. Sedangkan, untuk kurva kecepatan menjadi lebih kecil ketika parameter *volume fraction* menjadi lebih besar. Kecepatan fluida menjadi lebih kecil pada $0 < \eta < 3$ dan temperatur menjadi lebih besar pada $0 < \eta < 5.5$.

6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan pada penelitian selanjutnya adalah dapat dilakukan studi tidak pada titik stagnasi atau ($x \neq 0$), sehingga dapat dilihat kurva kecepatan dan temperatur disekeliling permukaan bola bermagnet.

PERNYATAAN RESMI

Penelitian ini didukung oleh Lembaga Penelitian dan Pengembangan Masyarakat/LPPM), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya, Jawa Timur, Indonesia dengan nomor surat persetujuan pendanaan 970/PKS/ITS/2018. Kami mengucapkan terimakasih kepada LPPM-ITS yang telah memberikan kesempatan untuk menyajikan penelitian ini pada Jurnal Internasional.

DAFTAR PUSTAKA

- Alkasasbech, H. T. (2015). *Numerical Solution for Convection Boundary Layer Flow Over A Solid Sphere of Newtonian and Non-Newtonian Fluid*, University Malaysia Pahang, Malaysia.
- Anderson, John. D.(2011) *Fundamentals of Aerodynamics 5th*, McGraw-Hill, America.
- Arber, T. (2013), *Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD)*, Lecture handout: University of Warwick, UK.
- Favre, M. and Tardu, S. (2009) *Convective Heat Transfer*, Wiley, United States of America.
- Ghani, M., Widodo, B. and Imron, C. (2015) *Model Aliran Konveksi Campuran yang Melewati Permukaan Sebuah Bola*, Seminar Nasional Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia, 27 Desember 2014.
- Ismail, M. A., Mohamad, N. F., Ilias, M.R. and Shafie, S. (2017) *MHD Effect on Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow past a Circular Cylinder with Constant Wall Temperature*, IOP Publishing, Malaysia, 2017.
- Kasim, Abdul Rahman Muhd. (2014). *Convective Boundary Layer flow of Viscoelastic Fluid*, PhD. Universiti Teknologi Malaysia.
- Kandasamy, R., Zailani, N. A. B., Jaafar, F. N. B., (2017). *Impact of nanoparticle volume fraction on squeezed MHD water based Cu, Al_2O_3 and SWCNTs flow over a porous sensor surface*, Journal Physics and Mathematics.
- Lienhard, J. H. (2002). *A Heat Transfer Textbook*, Courier Dover Publications.
- Leal, L. G. (1992), *Laminar Flow and Convective Transport Processes: Scaling Principles and Asymptotic Analysis*, Butterworth-Heinemann.
- Leal, L. G. (2007). *Advanced Transport Phenomena*, Cambridge University Press.
- Mohammad, N. F., Mohd Kasim, A. R., Ali, A. and Shafie, S. (2012). *Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow Past a Sphere in a Micropolar Fluid*. In *American Institute of Physics Conference Series*. Vol. 1450. 211-217.

- Mohammad, N.F., (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamic Convective Boundary Layer Flow Past a Sphere In Viscous And Micropolar Fluids*, Thesis Doctor of Philosophy (Matematis), Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
- Nayak, I., Nayak, A.K., and Padhy, S. (2016) *Implicit finite difference solution for the magneto-hydro-dynamic unsteady free convective flow and heat transfer of a third-grade fluid past a porous vertical plate*, International Journal Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, Vol. 7, No. 1.
- Ningtyas, R. A., (2016) *Magnetohidrodinamik Fluida Mikrokutub Tak Tunak Pada Lapisan Batas Yang Mengalir Melewati Bola Teriris*, Tesis, Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Palyama, P. A. M., (2017) *Magnetohidrodinamik yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas yang Mengalir Melalui Bola di Dalam Fluida Nano di Bawah Pengaruh Medan Magnet*, Tesis, Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Pletcher, R. H., Tannehill J. C., Anderson, J. D dan Anderson, D., (2013) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Third Edition*, CRC Press, New York.
- Potter, M.C., Wiggert, D.C., dan Ramadan,B.H., (2012) *Mechanics of Fluids Fourth Edition*, Cengage Learning, USA.
- Rabeti, M., (2014). *Mixed Convection Heat Transfer of Nanofluids about a Horizontal Circular Cylinder in Porous Media*, SOP Transaction on Nano Technology, volume 1, number 1.
- Ramadhan, A. I., (2012). *Analisis Perpindahan Panas Fluida Pendingin Nano fluida Di Teras Reaktor PWR (Pressurized Water Reactor) Dengan Computational Fluid Dynamics*, Tesis Program Magister, Universitas Pancasila, Jakarta.
- Rebay, M., Kakac, S., and Cotta, R. M., Ramadhan, A. I., (2016). *Microscale and Nanoscale Heat Transfer : Analysis, Design, and Application*, CRC Press.
- Rezzolla, L., (2011). *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations*, Albert Einstein Institute, Max-Planck-Institute for Gravitational Physics, Potsdam, Germany.
- Waltar, A. E., Todd, D. R., Tsevetkov, P. V. (2011). *Fast Spectrum Reactors*, Springer, New York.

- Wei,Z., Jang, B., Zhang, Y., and Jia, Y., (2013). *Parallelizing Alternating Direction Implicit Solver on GPUs*, Procedia Computer Science 18 (2013) 389-398.
- White, F. M., (2011). *Fluid Mechanics, Seventh Edition*, McGraw-Hill Companies, New York.
- Widodo, B., (2012). *Pemodelan Matematika*, ITSpress, Surabaya.
- Widodo, B., (2012a), *The Influence Of Hydrodynamics On Pollutant Dispersion In The River*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences (IJCMS) ISSN 1312-7586. Vol. 7. 2012. no. 45, from 2229 to 2234, HIKARI Ltd Journals and Books Publisher. Bulgaria.
- Widodo,B., (2013), *The Influence Of Hydrodynamics On Pollutant Dispersion In The River*, submitted to The International Journal of Applied Mathematical Sciences (International journals and books publishers of science, technology and medicine, Hikari Ltd Bulgaria).
- Widodo,B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S, dan Imron, C., (2015), *"Numerical Solution of Heat Transfer Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past A Sphere"*, *International Journal of Far East Journal of Mathematical Sciences*, Puspha Publishing House, India.
- Widodo, B., Anggriani, I., Imron, C., (2016). *The Characterization Of Boundary Layer Flow in The Magnetohydrodynamic Micropolar Fluid Past A Solid Sphere*, *International Journal of Advances in Science Engineering and Technology*, ISSN:2321-9009.
- Widodo,B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G.O., Rahayuningsih, T. and Purbandini (2016). *Viscoelastic Fluid Flow Past a Porous Circular Cylinder when The Magnetic Field Included*, *Far East Journal Mathematical and Sciences (Puspha Publishing House India)*, Vol 99 No 2: 173-186.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Transformasi persamaan pembangun ke persamaan non-dimensional

Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{y}} = 0$$

dengan substitusi

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}; r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}$$

dapat diperoleh

$$\frac{\partial(rauU_{\infty})}{\partial(ax)} + \frac{\partial(ravU_{\infty}Re^{-1/2})}{\partial(ayRe^{-1/2})} = 0$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{aU_{\infty}\partial(ru)}{a\partial(x)} + \frac{aU_{\infty}Re^{-1/2}\partial(rv)}{aRe^{-1/2}\partial(y)} = 0$$

dengan menggunakan operasi pembagian diperoleh

$$U_{\infty} \frac{\partial(ru)}{\partial x} + U_{\infty} \frac{\partial(rv)}{\partial(y)} = 0$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$U_{\infty} \left(\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} \right) = 0$$

sehingga diperoleh persamaan non-dimensional sebagai berikut

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

Persamaan Momentum

Pada sumbu x

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_{\bar{x}}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \right) &= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} \right) - \sigma(B_0)^2 \bar{u} \\ &- \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_{\bar{x}} \end{aligned}$$

dengan substitusi

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}; p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fn} U_{\infty}^2}; t = \frac{U_{\infty} \bar{t}}{a};$$

$$T = \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}; g_{\bar{x}} = -g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

dapat diperoleh

Pada ruas kiri

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho_{fn} \left(\frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial \left(\frac{at}{U_{\infty}}\right)} + (uU_{\infty}) \frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial(ax)} + \frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)} \right)$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho_{fn} \left(\frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial(u)}{\partial t} + u \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial(u)}{\partial x} + v \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial(u)}{\partial y} \right)$$

atau

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho_{fn} \frac{U_{\infty}^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Pada ruas kanan

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_{\bar{x}}$$

$$= -\frac{\partial p \rho_{fn} U_{\infty}^2}{\partial(ax)} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2(uU_{\infty})}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(uU_{\infty})}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)^2} \right) + \sigma(B_0)^2 (uU_{\infty})$$

$$+ \rho_{fn} \beta (T(T_w - T_{\infty})) g \sin x$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_{\bar{x}}$$

$$= -\frac{\rho_{fn} U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn} \left(\frac{U_{\infty}}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_{\infty} Re}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sigma(B_0)^2 (uU_{\infty})$$

$$+ \rho_{fn} \beta (T(T_w - T_{\infty})) g \sin x$$

atau

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_{\bar{x}}$$

$$= -\frac{\rho_{fn} U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn} \frac{U_{\infty}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sigma(B_0)^2 (uU_{\infty})$$

$$+ \rho_{fn} \beta (T(T_w - T_{\infty})) g \sin x$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka diperoleh

$$\rho_{fn} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\rho_{fn} U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn} \frac{U_\infty}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sigma(B_0)^2 (u U_\infty) + \rho_{fn} \beta (T(T_w - T_\infty)) g \sin x$$

dengan membagi kedua ruas dengan $\rho_{fn} \frac{U_\infty^2}{a}$ diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho_{fn} U_\infty^2}{a} \frac{a}{\rho_{fn} U_\infty^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn} \frac{U_\infty}{a^2} \frac{a}{\rho_{fn} U_\infty^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sigma(B_0)^2 (u U_\infty \frac{a}{\rho_{fn} U_\infty^2}) + \rho_{fn} \beta \left(\frac{a}{\rho_{fn} U_\infty^2} \right) (T(T_w - T_\infty)) g \sin x$$

dengan melakukan penyederhanaan kedua ruas dengan diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}} \frac{1}{a U_\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sigma(B_0)^2 (u U_\infty) \frac{a}{\rho_{fn} U_\infty^2} + \beta \left(\frac{a}{U_\infty^2} \right) (T_w - T_\infty) g T \sin x$$

dengan melakukan substitusi parameter-parameter tak berdimensi maka diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + v_{fn} \frac{1}{Re v_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + M u + \lambda T \sin x$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{Re v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M u + \lambda T \sin x$$

Pada sumbu y

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{v} \\ &- \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} \end{aligned}$$

dengan substitusi

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_\infty}; p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fn} U_\infty^2}; t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a}; \\ T &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}; g_{\bar{y}} = g \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \end{aligned}$$

maka dapat diperoleh

Pada ruas kiri

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho_{fn} \left(\frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{at}{U_{\infty}} \right)} + (uU_{\infty}) \frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (ax)} + \frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}} \right)} \right)$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho_{fn} \left(\frac{U_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{uU_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{vU_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

atau

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho_{fn} \frac{U_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Pada ruas kanan

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_{\bar{y}} = -\frac{\partial (p \rho_{fn} U_{\infty}^2)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}} \right)} \\ & + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (ax)^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}} \right)^2} \right) (B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) - \rho_{fn} \beta (T(T_w - T_{\infty})) \\ & g \cos x \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_{\bar{y}} = -\frac{\rho_{fn} U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a} \frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \mu_{fn} \left(\frac{U_{\infty}}{a^2 Re^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) - \rho_{fn} \beta (T(T_w - T_{\infty})) \\ & g \cos x \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fn} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_{\bar{y}} = -\frac{\rho_{fn} U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a} \frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \mu_{fn} \frac{U_{\infty}}{a^2} \left(\frac{1}{Re^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \sigma(B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) - \rho_{fn} \beta (T(T_w - T_{\infty})) \\ & g \cos x \end{aligned}$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \frac{U_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = -\frac{\rho_{fn} U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{fn} \frac{U_{\infty}}{a^2} \left(\frac{1}{Re^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ & + \sigma(B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) - \rho_{fn} \beta (T(T_w - T_{\infty})) \\ & g \cos x \end{aligned}$$

dengan membagi kedua ruas dengan $\frac{\rho_{fn} U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}} \frac{1}{a U_{\infty} Re^{1/2}} \left(\frac{1}{Re^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \sigma (B_0)^2 \left(\frac{a}{Re U_{\infty} \rho_{fn}} \right) v - \rho_{fn} \beta (T (T_w - T_{\infty})) \\ &g \cos x \left(\frac{a}{Re^{1/2} U_{\infty}^2 \rho_{fn}} \right) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}} \frac{1}{a U_{\infty} Re^{1/2}} \left(\frac{1}{Re^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \sigma (B_0)^2 \left(\frac{a}{Re U_{\infty} \rho_{fn}} \right) v - \beta \left(\frac{a}{U_{\infty}^2} \right) (T_w - T_{\infty}) \\ &g \frac{1}{Re^{1/2}} T \cos x \end{aligned}$$

dengan melakukan substitusi parameter-parameter tak berdimensi maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + v_{fn} \frac{1}{Re v_f} \frac{1}{Re^{1/2}} \left(\frac{1}{Re^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \left(\frac{M}{Re} \right) v - \frac{\lambda}{Re^{1/2}} T \cos x \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{M}{Re} v - \frac{\lambda}{Re^{1/2}} \\ &T \cos x \end{aligned}$$

Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

dengan substitusi

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}; v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}; t = \frac{U_{\infty} \bar{t}}{a}; T = \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}$$

maka dapat diperoleh

Pada ruas kiri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial\left(\frac{at}{U_\infty}\right)} \\ &+ u U_\infty \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ax)} \\ &+ \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)}\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial t} + \frac{\partial T_\infty}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{U_\infty}{a} u \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial x} + \frac{\partial T_\infty}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{U_\infty}{a} v \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial y} + \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

karena T_∞ merupakan suatu konstanta, maka turunan terhadap t, x , dan y bernilai nol sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{U_\infty}{a} u \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{U_\infty}{a} v \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \\ &= \frac{U_\infty}{a} \left(\left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial t} \right) + u \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty))}{\partial y} \right) \right)\end{aligned}$$

Pada ruas kanan

$$\alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)^2} \right)$$

atau

$$\begin{aligned}&\alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &= \frac{\alpha_{fn}}{a^2} \left(\left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_\infty}{\partial x^2} \right) + Re \left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty))}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_\infty}{\partial y^2} \right) \right)\end{aligned}$$

karena T_∞ merupakan suatu konstanta, maka turunan terhadap t, x , dan y bernilai nol sehingga diperoleh

$$\alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) = \frac{\alpha_{fn}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty))}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty))}{\partial y^2} \right)$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{U_\infty}{a} \left(\left(\frac{\partial (T(T_w - T_\infty))}{\partial t} \right) + u \left(\frac{\partial (T(T_w - T_\infty))}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial (T(T_w - T_\infty))}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{\alpha_{fn}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty))}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty))}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} & U_\infty \left(\left(\frac{\partial (T(T_w - T_\infty))}{\partial t} \right) + u \left(\frac{\partial (T(T_w - T_\infty))}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial (T(T_w - T_\infty))}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{\alpha_{fn}}{a} \left(\frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty))}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty))}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

kedua ruas dibagi oleh $(T_w - T_\infty)U_\infty$ diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\alpha_{fn}}{aU_\infty} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

dengan substitusi $Re = \frac{U_\infty a}{v_f}$ diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\alpha_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\alpha_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

dengan menggunakan operasi perkalian diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\alpha_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{fn}}{v_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

selanjutnya dengan substitusi $Pr = \frac{v_f}{\alpha_f}$ diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \frac{\alpha_{fn}}{Pr \alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{fn}}{Pr \alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

dengan M dan λ adalah parameter tak berdimensi. Parameter tersebut didefinisikan sebagai berikut.

Parameter Magnetik

$$M = \frac{a\sigma(B_0)^2}{\rho U_\infty^2}$$

Parameter Konveksi

$$\lambda = \frac{Gr}{Re^2}$$

Berdasarkan variabel-variabel tak berdimensi di atas, kondisi awal dan kondisi batas diberikan sebagai berikut

$t = 0 : u = v = 0, T = 0$ untuk setiap x, y

$t > 0 : u = v = 0, T = 1$ ketika $y = 0$

$u = u_e(x), T = 0$ ketika $y \longrightarrow \infty$

Lampiran 2 Transformasi Kondisi Batas Dimensional

Pada penelitian ini menggunakan kondisi batas yaitu
 $\bar{t} = 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty$ untuk setiap \bar{x}, \bar{y}
 $\bar{t} > 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w$ pada saat $\bar{y} = 0$
 $\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{u} = \bar{v}, \bar{T} = T_\infty$ saat $\bar{y} \rightarrow \infty$
 dengan menggunakan variabel non-dimensional

$$y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}; \quad T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}; \quad \bar{u}_e(\bar{x}) = u_e(x)U_\infty$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{T} &= T_\infty \\ T &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty} \\ &= \frac{T_\infty - T_\infty}{T_w - T_\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T} &= T_w \\ T &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty} \\ &= \frac{T_w - T_\infty}{T_w - T_\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_e(\bar{x}) \\ uU_\infty &= u_e(x)U_\infty \\ u &= u_e \end{aligned}$$

sehingga kondisi batas menjadi

$t = 0 : u = v = 0, T = 0$ untuk setiap x, y
 $t > 0 : u = v = 0, T = 1$ pada saat $y = 0$
 $u = u_e, T = T = 0$ saat $y \rightarrow \infty$

Lampiran 3 Kecepatan Aliran Bebas (*Free Stream*)

kecepatan aliran bebas (*free stream*) dalam bentuk bola (*spherical*) diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}U_r &= -U_\infty \cos\theta \\U_\theta &= U_\infty \sin\theta \\U_\phi &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

stream line dari kecepatan diberikan sebagai berikut (Anderson, 2011).

$$U = \nabla\varphi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} e_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} e_\theta + 0e_\phi\tag{2}$$

dengan penambahan Persamaan (1) ke dalam Persamaan (2) diperoleh

$$\begin{aligned}U_r &= -U_\infty \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} = -(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^3}) \cos\theta \\U_\theta &= U_\infty \sin\theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} = (U_\infty + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r^3}) \sin\theta \\U_\phi &= 0\end{aligned}$$

untuk menentukan titik stagnasi pada aliran fluida, diberikan $U_r = U_\theta = 0$, maka diperoleh
untuk $U_\theta = 0$

$$\begin{aligned}U_\theta &= (U_\infty + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r^3}) \sin\theta \\0 &= (U_\infty + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r^3}) \sin\theta\end{aligned}$$

diperoleh

$$0 = \sin\theta$$

maka θ yang memenuhi adalah $\theta = 0$ dan $\theta = \pi$, sehingga titik stagnasi berada pada $\theta = 0$ dan $\theta = \pi$. Sedangkan, untuk $U_r = 0$

$$\begin{aligned}U_r &= -(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^3}) \cos\theta \\0 &= -(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^3}) \cos(0) \\(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^3}) 1 &= 0 \\U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^3} &= 0\end{aligned}$$

dengan $r = R$ merupakan koordinat jari-jari dari titik stagnasi, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut

$$U_\infty = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{R^3}$$

$$R^3 = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{U_\infty}$$

maka untuk nilai R diperoleh

$$R = \left(\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{U_\infty} \right)^{1/3}$$

dengan melakukan substitusi nilai R pada persamaan U_r diperoleh

$$U_r = -\left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{R^3} \right) \cos\theta$$

$$U_r = -\left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{U_\infty} \right)} \right) \cos\theta$$

$$U_r = -\left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{2\pi U_\infty}{\mu} \right) \cos\theta$$

$$U_r = -(U_\infty - U_\infty) \cos\theta$$

$$U_r = 0$$

diperoleh bahwa $U_r = 0$, ketika $r = R$. Untuk semua θ dan ϕ . Persamaan U_r, U_θ , dan U_ϕ adalah aliran *incompressible* yang melewati jari-jari R . Pada permukaan bola, dengan $r = R$ kecepatan tangensial U_θ disubstitusikan dengan $R = \left(\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{U_\infty} \right)^{1/3}$, maka diperoleh

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R^3} \right) \sin\theta$$

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{\mu}{4\pi} \frac{2\pi U_\infty}{\mu} \right) \sin\theta$$

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{1}{2} U_\infty \right) \sin\theta$$

maka diperoleh

$$U_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin\theta$$

sehingga untuk aliran bebas diperoleh

$$\bar{u}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

dengan transformasi non-dimesional maka

$$u_e U_\infty = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{ax}{a}\right)$$

atau

$$u_e = \frac{3}{2} \sin x$$

Lampiran 4 Fungsi Alir

Fungsi alir ini dinyatakan sebagai berikut.

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

dan

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dengan melakukan substitusi u dan v pada persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi diperoleh

Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u - u_e) \\ &+ \lambda T \sin x \end{aligned}$$

dengan substitusi nilai u dan v diperoleh

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + M \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \\ &+ \lambda T \sin x \end{aligned}$$

dengan menggunakan sifat turunan

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}$$

dan dengan

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

dan

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + M \\ & \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

dengan menggunakan operasi perkalian diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + M \\ & \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \\ & \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

Persamaan Energi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ = & \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ = & \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Kondisi batas dapat dituliskan dalam bentuk fungsi alir sebagai berikut

$t < 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = T = 0, T = 0$ untuk setiap x, y

$t \geq 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 1$ ketika $y = 0$

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x), T = 0$ ketika $y \longrightarrow \infty$

Hasil dari fungsi alir diperoleh bahwa persamaan kontinuitas dapat dihilangkan sehingga hanya terdapat dua persamaan, yaitu persamaan momentum dan persamaan energi.

Lampiran 5 Perhitungan Persamaan Similaritas

variabel similaritas yang terdiri dari dua tipe waktu yaitu untuk waktu kecil (*small time*) dan waktu besar (*large time*).

- i Untuk waktu kecil (*small time*) dengan $t \leq t^*$; t^* adalah sebarang nilai.
Diberikan persamaan sebagai berikut

$$\Psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t); \eta = \frac{y}{t^{1/2}}; T = s(x, \eta, t) \quad (3)$$

- ii Untuk waktu besar (*large time*) dengan $t > t^*$; t^* adalah sebarang nilai.
Diberikan persamaan sebagai berikut

$$\Psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t); Y = y; T = S(x, Y, t) \quad (4)$$

dengan menerapkan Persamaan (3) dan Persamaan (4) pada Persamaan momentum dan persamaan energi untuk *small time* dan *large time* diperoleh sebagai berikut

Persamaan Momentum untuk *Small Time*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \\ & \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

dengan

i

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = \frac{1}{t^{1/2}}$$

ii

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = \frac{-1}{2} \frac{\eta}{t}$$

iii

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \eta} (t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)) \frac{1}{t^{1/2}} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{t^{1/2} u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \end{aligned}$$

iv

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= t^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} (u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= r(x) t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + u_e(x) t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial r(x)}{\partial x} + t^{1/2} u_e(x) \\
&\quad r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}
\end{aligned}$$

v

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= u_e(x) r(x) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \left(\frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
\end{aligned}$$

vii

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_e(x) \right) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} r(x) \right) u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{-1}{2} \frac{\eta}{t} \right) \\
&\quad + u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \right) \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= \frac{-u_e(x) r(x) \eta}{t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&\quad + u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

dapat dituliskan $u_e(x) = u_e$, $r(x) = r$, dan $f(x, \eta, t) = f$

Ruas kiri

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{1}{r} \left(\frac{-u_e r \eta}{t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + u_e r \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \right) r \frac{\partial f}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left(r t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e t^{1/2} f \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{u_e r}{t^{1/2}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&= \left(-\frac{1}{r} \frac{u_e r \eta}{t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + u_e \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) \right) - \frac{1}{r^3} u_e^2 r^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2} u_e r^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} u_e^2 r \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} u_e^2 r^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
&\quad - \frac{1}{r^2} t^{1/2} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r^2} t^{1/2} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r^2} t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&= -\frac{u_e \eta}{t} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} u_e^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r} u_e^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} f u_e^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
&= -\frac{u_e}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&- \frac{1}{r} f u_e^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}
&u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - M \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \\
&+ \lambda T \sin x \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \left(\frac{u_e r}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + M \\
&\left(\frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \lambda T \sin x \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + M \left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) \\
&+ \lambda T \sin x
\end{aligned}$$

Ruas kiri=Ruas kanan

$$\begin{aligned}
&-\frac{u_e}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&-\frac{1}{r} f u_e^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \\
&\left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + M \left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \lambda T \sin x
\end{aligned}$$

kedua ruas dibagi u_e/t diperoleh

$$\begin{aligned}
&-\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&-t u_e f \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \\
&\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + M t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \frac{\lambda T t}{u_e} \sin x
\end{aligned} \tag{5}$$

Persamaan (5) dapat juga ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
= & t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
& - \frac{\lambda T t}{u_e} \sin x
\end{aligned}$$

dengan menerapkan variabel similaritas pada persamaan momentum untuk *small time* adalah

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
= & t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
& - \frac{\lambda s t}{u_e} \sin x
\end{aligned}$$

Persamaan Energi untuk *Small Time*

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
= & \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

dengan

i

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(\frac{-1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\
\frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\frac{-\eta}{2t} \right) \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

ii

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

iii

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial x}$$

iv

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{1}{t} \left(\frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right)\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dituliskan $u_e(x) = u_e$; $r(x) = r$; $f(x, \eta, t) = f$, maka persamaan similaritas untuk persamaan energi

Ruas kiri

$$\begin{aligned}& \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= \frac{-\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} \left(r t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e t^{1/2} f \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ & \quad \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s}{\partial \eta}\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}& \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

Ruas kiri=Ruas kanan

$$\begin{aligned}& \frac{-\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} \left(r t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e t^{1/2} f \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ & \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

kedua ruas dikalikan dengan Prt diperoleh

$$\begin{aligned}
& Prt \frac{-\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prt \frac{\partial s}{\partial t} + Prt u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - Prt f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Prt \frac{u_e f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\
& - Prt u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan energi untuk *small time* adalah

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\
& + Prt \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt \left[\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right]
\end{aligned}$$

Persamaan Momentum untuk *Large Time*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
& = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \\
& + \lambda T \sin x
\end{aligned}$$

dengan

i

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial Y} (u_e(x) r(x) F(x, Y, t)) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= u_e(x) r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y}
\end{aligned}$$

ii

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_e(x) r(x) F(x, Y, t)) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial u_e(x) r(x)}{\partial x} F(x, Y, t) + \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial x} u_e(x) r(x) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \right) F(x, Y, t) + \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial x} u_e(x) r(x) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) F(x, Y, t) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) F(x, Y, t) + \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial x} u_e(x) r(x)
\end{aligned}$$

iii

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial Y^2} \right)\end{aligned}$$

iv

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial Y^2} \right) \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial^3 F(x, Y, t)}{\partial Y^3} \right)\end{aligned}$$

v

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial u_e(x) r(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial x \partial Y} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \left(u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} + r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \\ &\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial x \partial Y} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} + r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \\ &\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial x \partial Y}\end{aligned}$$

vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial t} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial t \partial Y} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} &= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial t \partial Y}\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dituliskan $u_e(x) = u_e$, $r(x) = r$, dan $F(x, Y, t) = F$, maka persamaan similaritas pada persamaan momentum untuk *large time* adalah

Ruas kiri

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ = & u_e \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} u_e^2 \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \\ + & u_e^2 \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - u_e F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{u_e^2 F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - u_e^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} = & u_e \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - u_e F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\ - & \frac{u_e^2 F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - u_e^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned} & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \\ + & \lambda T \sin x \\ = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{u_e r}{r} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} \right) + M \left(\left(\frac{1}{r} r u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \right) - u_e \right) \\ + & \lambda T \sin x \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] u_e \left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} \right) + M \left(\left(u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \right) - u_e \right) \\ + & \lambda T \sin x \end{aligned}$$

Ruas kiri=Ruas kanan

$$\begin{aligned} & u_e \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - u_e F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{u_e^2 F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\ - & u_e^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] u_e \left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} \right) \\ + & M \left(\left(u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \right) - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

kedua ruas dibagi oleh u_e diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial u_e}{\partial x} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{u_e F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\ & - u_e \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} \right) \\ & + M \left(\left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right) - 1 \right) + \frac{\lambda T \sin x}{u_e} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \\ & = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] - M \left(\left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right) - 1 \right) \\ & - \frac{\lambda T \sin x}{u_e} \end{aligned}$$

dengan menerapkan variabel similaritas pada persamaan momentum untuk *large time* adalah

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \\ & = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + M \left(1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right) \right) \\ & - \frac{\lambda S \sin x}{u_e} \end{aligned}$$

Persamaan Energi untuk *Large Time*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & = \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

dengan

i

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial S(x, Y, t)}{\partial t}$$

ii

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S(x, Y, t)}{\partial x}$$

iii

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S(x, Y, t)}{\partial Y}$$

iv

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 S(x, Y, t)}{\partial Y^2}$$

Selanjutnya dapat dituliskan $S(x, Y, t) = S$, maka persamaan similaritas pada persamaan energi untuk *large time* adalah

Ruas kiri

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ = & \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} r F + \frac{\partial r}{\partial x} u_e F + \frac{\partial F}{\partial x} u_e r \right) \left(\frac{\partial S}{\partial Y} \right) \\ = & \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \left(F \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{1}{r} F \frac{\partial r}{\partial x} + u_e \frac{\partial F}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial Y} \right) \end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ = & \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \end{aligned}$$

Ruas kiri=Ruas kanan

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \left(F \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{1}{r} F \frac{\partial r}{\partial x} + u_e \frac{\partial F}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial Y} \right) \\ = & \frac{1}{Pr} \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \end{aligned}$$

kedua ruas dikali dengan Pr maka diperoleh

$$\begin{aligned} & Pr \frac{\partial S}{\partial t} + Pr u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - Pr F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - Pr u_e \frac{1}{r} F \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - Pr u_e \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \\ = & \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \end{aligned}$$

dengan menerapkan variabel similaritas pada persamaan energi untuk *large time* adalah

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr \frac{\partial u_e}{\partial x}$$

$$F \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr \left[\frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{1}{r} F \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right]$$

Aliran bebas pada penelitian ini diperoleh $u_e = \frac{3}{2} \sin x$, dengan substitusi u_e pada gaya apung pada persamaan momentum untuk *small time* dan *large time*, maka diperoleh

Persamaan momentum untuk *small time*

$$\left[\frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x}$$

$$\left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$$

$$- \frac{2}{3} \lambda_{st}$$

Persamaan momentum untuk *large time*

$$\left[\frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} \left((1 - \chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 - F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right]$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right)$$

$$- \frac{2}{3} \lambda S$$

Aliran bebas pada penelitian ini diperoleh $u_e = \frac{3}{2} \sin x$, sehingga untuk $\frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{3}{2} \cos x$, dengan substitusi u_e dan $\frac{\partial u_e}{\partial x}$ dengan melakukan substitusi terhadap pada persamaan pembangun maka diperoleh

Untuk *small time*

Persamaan momentum untuk *small time*

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} t \cos x \\
& \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + \frac{3}{2} t \sin x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
& + M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \lambda s t
\end{aligned} \tag{6}$$

Persamaan energi untuk *small time*

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
& + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3 \cos x Pr t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} + Pr t \frac{3}{2} \sin x \\
& \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
t = 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0 \text{ untuk semua } x, \eta \\
t > 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, s = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Untuk *large time*

Persamaan momentum untuk *large time*

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \cos x \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + 2F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \\
& = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + \frac{3}{2} \sin x \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) - \frac{2}{3} \lambda S
\end{aligned} \tag{8}$$

Persamaan energi untuk *large time*

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + 3 Pr \cos x F \frac{\partial S}{\partial Y} \\
& = Pr \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2} Pr \sin x \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ saat } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty$$

Lampiran 6 Penurunan Kondisi Awal

Persamaan yang digunakan untuk menentukan kondisi awal yaitu

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
& = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \lambda st \\
& \quad \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\
& + \frac{3}{2} Pr t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = Pr t \frac{\partial s}{\partial t}
\end{aligned}$$

dengan melakukan substitusi $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$ dan $\frac{\partial s}{\partial \eta} = s'$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' + \frac{3}{2} t \left(1 - (f')^2 + f f'' \right) \\
& = t \frac{\partial f'}{\partial t} + Mt \left(1 - f' \right) - \frac{2}{3} \lambda st \\
& \quad \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' \\
& + \frac{3}{2} Pr t f s' = Pr t \frac{\partial s}{\partial t}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' + \frac{3}{2} t \left(1 - (f')^2 + f f'' \right) \\
& - Mt \left(1 - f' \right) + \frac{2}{3} \lambda st = t \frac{\partial f'}{\partial t} \\
& \quad \left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' \\
& + \frac{3}{2} Pr t f s' = Pr t \frac{\partial s}{\partial t}
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan $t = 0$ maka diperoleh

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' = 0$$

untuk mendapatkan f digunakan persamaan

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

dengan substitusi $m = f''$. sehingga persamaan menjadi

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] m' + \frac{\eta}{2} m = 0$$

dengan substitusi $m' = \frac{dm}{d\eta}$ diperoleh

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{dm}{d\eta} + \frac{\eta}{2} m = 0$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] dm + \frac{\eta}{2} m d\eta = 0$$

kedua ruas dibagi oleh m diperoleh

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \frac{1}{m} dm + \frac{\eta}{2} d\eta = 0$$

kemudian kedua ruas diintegrasikan sehingga diperoleh

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right] \ln m + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$

atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\ln m = \left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] \left[-\frac{\eta^2}{4} + c_1 \right]$$

maka untuk m diperoleh

$$m = e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] \left[-\frac{\eta^2}{4} + c_1 \right]}$$

oleh karena $m = f''$ maka

$$f'' = e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] \left[-\frac{\eta^2}{4} \right]} e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]}$$

untuk f' diperoleh

$$f' = \int e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] \left[-\frac{\eta^2}{4} \right]} e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]} d\eta$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$f' = e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]} \int e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] \left[-\frac{\eta^2}{4} \right]} d\eta$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error (erf) yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} erf(\sqrt{c}x)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \int e^{-\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] \left[\frac{\eta^2}{4} \right]} d\eta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}} erf \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right) \\ &+ c_2 \end{aligned}$$

maka untuk f' diperoleh

$$\begin{aligned} f' &= e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]} \sqrt{\frac{\pi}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}} \\ & erf \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right) + c_2 \end{aligned}$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$t > 0 : f = f' = 0, s = 1, b = \frac{1}{4}B_0$ pada saat $\eta = 0$

$f' = 1, s = 0, b = 0$ pada saat $\eta \rightarrow \infty$

selanjutnya akan dicari nilai $e^{-\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]}$ dan c_2

pada saat $\eta = 0$

$$0 = e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]} \sqrt{\frac{\pi}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}} \\ \operatorname{erf}(0) + c_2$$

oleh karena $\operatorname{erf}(0) = 0$ maka diperoleh

$$c_2 = 0$$

pada saat $\eta = \infty$

$$1 = e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]} \sqrt{\frac{\pi}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}} \\ \operatorname{erf}(\infty) + 0$$

oleh karena $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ maka diperoleh

$$1 = e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]} \sqrt{\frac{\pi}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}}}$$

atau

$$e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]} = \sqrt{\frac{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}{\pi}}$$

dengan substitusi $e^{\left[(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right) \right] [c_1]}$ dan c_2 ke f' maka diperoleh

$$f' = \sqrt{\frac{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}} \\ \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right) + 0$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$f' = \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \right)$$

dengan substitusi $e^{\left[(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)\right]^{[c_1]}}$ ke f'' maka diperoleh

$$f'' = e^{\left[(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)\right]^{[c_1]}} \sqrt{\frac{(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)}{\pi}}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$f'' = \sqrt{\frac{(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)}{\pi}} e^{\frac{-(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)}{4}} \eta^2$$

selanjutnya mencari nilai f dengan

$$f = \int f' d\eta$$

diperoleh

$$f = \int erf\left(\frac{\eta}{2}\sqrt{(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)}\right) d\eta$$

dengan menggunakan integral *error function* (erf)

$$\int erf(az) dz = z erf(az) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-a^2 z^2}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} f &= \eta erf\left(\frac{\sqrt{(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)}}{2}\eta\right) \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)}} \\ &e^{\frac{-(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)}{4}} \eta^2 + c_3 \end{aligned}$$

dengan kondisi batas $f = 0$ pada saat $\eta = 0$ maka diperoleh nilai c_3 sebagai berikut

$$\begin{aligned} 0 &= \eta erf(0) \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5}\left((1-\chi)+\chi\left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)}} \\ &e^0 + c_3 \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$c_3 = -\frac{2}{\sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}}$$

dengan substitusi c_3 pada persamaan f diperoleh

$$\begin{aligned} f = & \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}}{2} \eta \right) \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}} \\ & e^{\frac{-(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}{4} \eta^2} \\ & - \frac{2}{\sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}} \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f = & \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}}{2} \eta \right) \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}} \\ & \left(e^{\frac{-(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}{4} \eta^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

untuk mendapatkan s digunakan persamaan

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' = 0$$

dengan substitusi $n = s'$. sehingga persamaan menjadi

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) n' + Pr \frac{\eta}{2} n = 0$$

dengan substitusi $n' = \frac{dn}{d\eta}$ diperoleh

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1-\chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{dn}{d\eta} + Pr \frac{\eta}{2} n = 0$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) dn + Pr \frac{\eta}{2} n d\eta = 0$$

kedua ruas dibagi oleh n diperoleh

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \frac{1}{n} dn + Pr \frac{\eta}{2} d\eta = 0$$

kemudian kedua ruas diintegrasikan sehingga diperoleh

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \ln n + Pr \frac{\eta^2}{4} = c_4$$

atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\left(\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)} \right) \ln n = -Pr \frac{\eta^2}{4} + c_4$$

sehingga diperoleh $\ln n$ sebagai berikut

$$\ln n = \left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) \left(-Pr \frac{\eta^2}{4} + c_4 \right)$$

maka untuk n diperoleh

$$n = e^{\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) \left(-Pr \frac{\eta^2}{4} + c_4 \right)}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$n = e^{-\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) \left(Pr \frac{\eta^2}{4} \right)} e^{\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) (c_4)}$$

oleh karena $n = s'$ maka

$$s' = e^{-\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) \left(Pr \frac{\eta^2}{4} \right)} e^{\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) (c_4)}$$

untuk s diperoleh

$$s = \int e^{-\left(\frac{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)\right)\left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f}\right)\right)}{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}\right)} \left(Pr \frac{\eta^2}{4}\right) e^{\left(\frac{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)\right)\left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f}\right)\right)}{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}\right)} d\eta \quad (c_4)$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$s = e^{\left(\frac{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)\right)\left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f}\right)\right)}{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}\right)} \int e^{-\left(\frac{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)\right)\left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f}\right)\right)}{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}\right)} \left(Pr \frac{\eta^2}{4}\right) d\eta \quad (c_4)$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error (erf) yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} erf(\sqrt{c}x)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \int e^{-\left(\frac{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)\right)\left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f}\right)\right)}{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}\right)} \left(Pr \frac{\eta^2}{4}\right) d\eta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)\right)\left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f}\right)\right)}{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}\right)}} Pr \\ & erf \left(\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\left((k_s+2k_f)+\chi(k_f-k_s)\right)\left((1-\chi)+\left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f}\right)\right)}{(k_s+2k_f)-2\chi(k_f-k_s)}\right)} Pr \eta \right) + c_5 \end{aligned}$$

maka untuk s diperoleh

$$s = e^{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} (c_4) \\ \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)}} Pr} \\ erf \left(\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} Pr \eta \right) + c_5$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$t > 0 : f = f' = 0, s = 1, b = \frac{1}{4}B_0$ pada saat $\eta = 0$

$f' = 1, s = 0, b = 0$ pada saat $\eta \rightarrow \infty$

selanjutnya akan dicari nilai $e^{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} (c_4)$ dan c_5 pada saat $\eta = 0$

$$1 = e^{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} (c_4) \\ \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)}} Pr} \\ erf(0) + c_5$$

oleh karena $erf(0) = 0$ maka diperoleh

$$c_5 = 1$$

pada saat $\eta = \infty$

$$0 = e^{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} (c_4) \\ \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)}} Pr} \\ erf(\infty) + 1$$

oleh karena $erf(\infty) = 1$ maka diperoleh

$$-1 = e^{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} \quad (c_4)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} Pr}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$e^{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} \quad (c_4)$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} Pr}}$$

atau

$$e^{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} \quad (c_4)$$

$$= - \sqrt{\frac{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) Pr}{\pi}}$$

$$\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) \quad (c_4)$$

dengan substitusi e dan c_5 ke s maka diperoleh

$$s = - \sqrt{\frac{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) Pr}{\pi}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right)} Pr}}$$

$$erf \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{\left((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \right) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)s}{(\rho c_p)_f} \right) \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) Pr}{\eta}} \right) + 1$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$s = -erf \left(\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) Pr \eta} \right) + 1$$

dengan substitusi $e^{\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) (c_4)} \right)}$ ke s' maka diperoleh

$$s' = -e^{-\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) \left(Pr \frac{\eta^2}{4} \right)} \right)} \sqrt{\frac{\left(\frac{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)) \left((1 - \chi) + \left(\frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)}{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)} \right) Pr}{\pi}} \right)}$$

BIODATA PENULIS



Yolanda Norasia atau biasa dipanggil Yola terlahir di Blitar, 23 September 1994. Penulis telah menempuh pendidikan di SD Negeri Bligo, SMP Negeri 6 Sidoarjo, dan SMA Negeri 1 Sidoarjo. Pendidikan selanjutnya ditempuh di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), Jurusan Matematika angkatan 2012 dan mendapat gelar Sarjana Sains dengan menulis tugas akhir yang berjudul *Kajian Grafik Kendali Median Absoluted Deviation (MAD) Untuk Pemantauan Proses Non-Normal*. Kemudian melanjutkan studi di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada

Program Studi Magister Matematika angkatan 2016. Bidang minat yang sedang ditekuni adalah bidang minat Matematika Terapan yang terdiri atas Pemodelan Sistem dan Simulasi, Masalah Optimasi, dan Pengolahan Data. Penulis memiliki pengalaman kerja praktek pada bulan Juni 2015 di KPw Bank Indonesia Provinsi Jawa Timur dan menulis laporan kerja praktek yang berjudul *Proyeksi Inflasi Bahan Bakar Menggunakan Metode Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)*. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Thesis ini, bisa melalui email yolandanorasia@gmail.com.

Semoga bermanfaat.